Prof. Dr. Alfred Toth

Peirce-Zahlen

Vorwort

Die

Tucson (AZ), 14. August 2017 Prof. Dr. Alfred Toth

Kardinalitätshierarchie semiotischer Zahlen

1. Im folgenden wird gezeigt, daß die bislang von uns unterschiedenen semiotischen Zahlen (vgl. zur Einführung Toth 2010) nicht nur verschiedene Kardinalität aufweisen, sondern daß sie eine Hierarchie von Kardinalitäten definieren. Dies ist allerdings alles andere als trivial, denn das Zeichen besitzt bekanntlich (vgl. Bense 1979, S. 53 u. 67) eine trichotomische Inklusionsordnung, d.h. für die allgemeine Form der Zeichenrelation

$$Z = (3.x, 2.y, 1.z)$$

gilt $x \leqq y \leqq z$, und somit kann Z kategorietheoretisch durch

$$Z = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$$

definiert werden, woraus direkt

$$(3.x) \supset (2.y) \supset (1.z)$$

folgt. Das bedeutet also, daß selbst bei den polykontexturalen Proto-, Deutero- und Tritozahlen, die ordinal keine Teilmengen der semiotischen Zahlen mit höherer Kardinalität sind, via Kardinalität dennoch Teilmengenschaften bestehen.

2.1. Peano-Zahlen

Kardinalität = 3

(1, 2, 3)

2.2. Proto- und Deutero-Zahlen

Kardinalität = 3

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3)

2.3. Trito-Zahlen

Kardinalität = 5

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 3)

2.4. Peirce-Zahlen

Kardinalität = 10

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3),

(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 3),

(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 3).

2.5. Zeichenzahlen

Kardinalität = 27

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3),

(1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3),

(1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3),

(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3),

(2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3),

(2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 3, 3),

(3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 1, 3),

(3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 3),

(3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3).

Es gilt somit

27	⊃	10	⊃	5	⊃	3	=	3
Zeichenzahlen		Peirce-Zahlen		Trito		Protero/Deutero		Peano.

Literatur

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Calculus semioticus: Was zählt die Semiotik?. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Semiotische und kenosemiotische Ordinalität

1. Die Zeichen der Peirceschen Semiotik, d.h. die triadischen Relationen, die sich aus dyadischen sowie monadischen Teilrelationen zusammensetzen, besitzen eine doppelte Ordinalität, indem ein Subzeichen der Form (a.b) als Abbildung

SZ: $a. \rightarrow .b$ mit $a, b \in \{1, 2, 3\}$

verstanden werden kann. Alternativ könnte man sagen, es handle sich um eine Abbildung

SZ: $a \rightarrow b$ mit $a \in \{1., 2., 3.\}$ und $b \in \{.1, .2, .3\}$,

so daß man zwischen "linker" und "rechter" Ordinalität unterscheiden könnte, wobei die Primzeichen (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.) rechter Ordinalität die triadischen und diejenigen linker Ordinalität die trichotomischen "Peirce-Zahlen" (vgl. Toth 2008) sind. Der Grund für diese innerhalb der Arithmetik ganz ungewöhnliche ordinale Doppeltheit liegt natürlich in Peirces Annahme der Existenz "gebrochener" Kategorien und in der dadurch ermöglichten kartesischen Multiplikation von Kategorien. Wegen der verdoppelten Möglichkeit ihrer Abbildungen besteht also ein intrinsischer Zusammenhang zwischen kardinalen und ordinalen Peirce-Zahlen. Allerdings ist dieser nur in den Teilrelationen der Monaden präsent und wird in allen höheren Relationen quasi "amalgamiert".

2. Dagegen besitzen Kenozeichen, da sie nicht wie die Zeichen auf quantitativen, sondern auf qualitativen Zahlen basieren, vier Formen des "Aspektes" von Zahlen: Neben der reinen Kardinalität und der reinen Ordinalität weisen sie distinktive Strukturen für Kardi-Ordinalität und für Ordi-Kardinalität auf; vgl. Kronthaler (1986, S. 93):

Kontextur	K1	K2	K3	K4	...
Kardinalität	1	2	3	4	...
Kardi-Ordinalität	0	00	000	0000	...
Ordi-Kardinalität		01	001	0001	...
			010	0010	
			011	0011	
			012	0012	
				0100	
				0101	
				0102	
				0110	
				0111	
				0112	
				0120	
				0121	
				0122	
				0123	

<u>qual.-arithm.-sem. Entsprechungen</u>:

0 := M

1 := O

2 := I^1

3 := I^2

Geht man also von Benses semiotischer Arithmetik aus (vgl. Bense 1981, S. 17 ff.), so entsprechen sich innerhalb der monokontexturalen Semiotik

1 := M

2 := O

3 := I,

d.h. wir haben mit dem Abbildungstyp semiotischer Kategorien auf Peanozahlen (SZ: a. → .b mit a, b ∈ {1, 2, 3}) hier reine Kardinalität vor uns. Der Übergang von der Kardinalität zur Kardi-Ordinalität findet immer noch innerhalb der repräsentativen Semiotik statt, da nur hier die der vollständigen Induktion korrespondierende Iteration eines als konstant vorausgesetzten Einzelzeichens funktioniert (vgl. Bense 1981, S. 39). Hingegen finden wir beim Übergang von der Kardi-Ordinalität zur Ordi-Kardinalität die folgenden Korrespondenzen:

Monok. Semiotik	minim. polyk. Semiotik
1	01
2	—
3	010
(4)	011

Unter einer minimalen polykontexturalen Semiotik verstehen wir hier diejenige, welche für eine bestimmte Kontextur Kn die erste Tritostruktur liefert, für ein Dezimaläquivalent existiert. Z.B. ist die Peanozahl 2 der monokontexturalen Semiotik in keiner Proto-, Deutero- oder Tritostruktur für beliebiges Kn repräsentiert! Die Entsprechungen quantitativer und qualitativer Zahlen sind für die ersten $n \in \mathbb{N}$ sowie die ersten Kn nach Toth (2003, S. 57):

K3	K4	K5	K6	K7	...	K10	...
0	0	0	0	0		0	
1	1	1	1	1		1	
—	—	—	—	—		—	
3	—	—	—	—		—	
4	4	—	—	—		—	
5	5	5	—	—		—	
	6	6	6	—		—	
		7	7	7		—	
			8	8		—	
				9		—	
						10,	

d.h. K3 und die ihre entsprechende triadische Semiotik sind also die minimale polykontexturale Semiotik, in der ordi-kardinale Korrespondenzen zu Peirce-Zahlen existieren. Während also die qualitative Entsprechung der quantitativen Zahl 4 bereits in K3 auftaucht, fehlt diejenige der quantitativen Zahl 3 bereits ab K4. Semiotische Kontexturen sind somit nicht wechselseitig austauschbar.

Literatur

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003

Toth, Alfred, Einführung der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2008

Zur arithmetischen Semiotik

1. In Toth (2012) wurde von den beiden Möglichkeiten, die Gesamtinformation eines zum Zeichen erklärten, d.h. im Sinne Benses (1967, S. 9) meta-objektivierten Objekts,

a) $(\{\Omega_1, ..., \Omega_n\} \rightarrow I \rightarrow M)$

b) $(I \rightarrow \{\Omega_1, ..., \Omega_n\} \rightarrow M)$,

ausgegangen. Wenn einem mit der Möglichkeit einer arithmetischen Semiotik ernst ist, sollte man sich an Benses Einführung der Primzeichen (wiederabgedruckt in Bense 1981, S. 17 ff.) erinnern. In der Peirceschen Zeichenrelation ZR = (M, O, I) repräsentiert nach Bense M "die Kardinalität der Zahl im Sinne der Repräsentation als Mächtigkeit", O repräsentiert "die Ordinalität der Zahl im Sinne der Repräsentation als Nachfolge", und I repräsentiert "die Relationalität der Zahl im Sinne der Repräsentation als Konnex" (Bense 1981, S. 26).

2. Obwohl es natürlich bekannt ist, daß man die Grundrechenarten nicht einfach von den Zahlen auf die Subzeichen und Zeichen übertragen kann, sollte man sich der Tragweite der beiden obigen Formen von "Arithmetik-Autonomie" bewußt sein. Genauso wie bei einer Zahl von pragmatischen und semantischen Relationen abstrahiert und gerade dadurch die universale Anwendbarkeit der Zahlen ermöglicht wird, können Zeichen nur dann auf der gleichen Abstraktionsstufe wie Zahlen behandelt werden können, wenn auch sie wie die Zahlen rein syntaktisch behandelt werden. Bekanntlich hatte Hermes (1938) einen Überblick elementarer logischer Operation für eine solche Semiotik im Sinne einer "Theorie der Zeichengestalten" gegeben. Aber eine echte arithmetische Semiotik ist nur dann möglich, wenn die Primzeichen je gesondert im Sinne von Repräsentationen kardinaler, ordinaler und relationaler Zahlen behandelt werden, d.h. wenn man eine je gesonderte kardinale, ordinale und relationale Arithmetik für die Semiotik entwickelt, denn auch auf rein mathematischer bzw. logischer Ebene ist es bekanntlich unmöglich, Zahlen und Relationen oder kardinale und ordinale Zahlen usw. zu addieren, zu subtrahieren, usw. Man benötigt somit

a) für eine kardinale arithmetische Semiotik die Übertragung der Grundrechenarten von Zahlen auf Zeichen, vgl. z.B. Landau (1930)

b) für eine ordinale arithmetische Semiotik die Übertragung der transfiniten Arithmetik von Zahlen auf Zeichen, vgl. z.B. Bachmann (1967) und Toth (2011)

c) für eine relationale arithmetische Semiotik die Übertragung der Relationskalküls von logischen Ausdrücken auf Zeichen, vgl. z.B. Menne (1991, S. 138 ff.).

Literatur

Bachmann, Heinz, Transfinite Zahlen. Berlin 1967

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Hermes, Hans, Semiotik. Eine Theorie der Zeichengestalten als Grundlage für Untersuchungen von formalisierten Sprachen. Leipzig 1938

Menne, Albert, Einführung in die formale Logik. 2. Aufl. Darmstadt 1991

Landau, Edmund, Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

Toth, Alfred, Sind Peirce-Zahlen transfinit? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Toth, Alfred, Arithmetik-Autonomie. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012

Eine semiotische Matrizenvariation

1. In Toth (2012a) war gezeigt worden, daß eine tetradische semiotische Zeichenrelation, welche als um die von Bense (1975, S. 65 f.) vorgeschlagene Kategorie der Nullheit erweiterte Peirce-Bensesche Zeichenrelation konzipiert ist

$ZR^4 = (0.a, (1.b, (2.c, (3.d))))$,

eine semiotisch sehr interessante Eigenschaft besitzt, insofern nämlich nicht alle tetradischen Stellenwerte aus einer tetratomischen Wertemenge stammen, sondern a nur dann, wenn es als Hauptwert fungiert, alle vier Werte {0, 1, 2, 3} annehmen kann, wenn es jedoch als Stellenwert fungiert, nur die Werte {1, 2, 3} annehmen kann. Mit anderen Worten: Wir haben ein tetradisches Repertoire sowie ein triadisches, das eine Teilmenge von ihm ist. Diese beiden Repertoires sind aber im Falle von ZR^4 zwei verschiedenen Kategorien von Peirce-Zahlen ((a.) vs. (.a)) zugeordnet; vgl. Toth 2009.

Der Grund für diese Besonderheit liegt natürlich darin, wie bereits in Toth (2012b) ausgeführt, daß der "absolute Nullpunkt" der ZR^4 entsprechenden semiotischen Matrix nicht besetzt sein kann, weil die semiotische Interpretation von *(0.0) das iterierbare und daher absolute Objekt wäre.

	0	1	2	3
0	—	0.1	0.2	0.3
1	1.0	1.1	1.2	1.3
2	2.0	2.1	2.2	2.3
3	3.0	3.1	3.2	3.3

Diese "tetradische" unsymmetrische Matrix ist also im Grunde die durch einen "löcherigen" Rand begrenzte Menge von Peirce-Benseschen Subrelationen.

2. Im folgenden wollen wir die obige Matrix dadurch variieren, daß wir das Verhältnis von Zeilen und Spalten (d.h. von Tetraden und Tetratomien) umkehren:

	0	1	2	3
0	0.0	0.1	0.2	0.3
1	—	1.1	1.2	1.3
2	—	2.1	2.2	2.3
3	—	3.1	3.2	3.3

Hiermit haben wir also eine weitere unsymmetrische Matrix. Zwar ist die triadische Subrelation der Tetratomien vollständig, aber während in der ersten Matrix die vollständige trichotomische Triade von einem "löcherigen" Rand umgeben war, haben wir hier einen quasi-"parasitären" Punkt, der ausgerechnet mit dem absoluten Nullpunkt der tetradischen Zeichenfunktion zusammenfällt. Hier können also alle tetratomischen Peircezahlen in den Trichotomien, nicht aber in den Tetraden auftreten! Im Grunde könnte man diese Matrix semiotisch also so interpretieren, daß sie 1. die Peirce-Bensesche triadisch-trichotomische Zeichenmatrix als eingebettete enthält, 2. die bereits von Götz (1982, S. 4, 28) vorgeschlagene trichotomische Nullheit im Sinne der Vektormatrix der Präsemiotik, und 3. das Objekt, das im Sinne von Bense (1967, S. 9) in der thetischen Einführung durch Metaobjektivation einem Zeichen zugeordnet wird.

Literatur

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Götz, Matthias, Schein Design. Die Form und ihre Planung in semiotischer Sicht. Diss. Stuttgart 1982

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Kategoriale Vorthetik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Das semiotische Fadenkreuz. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Zur Adjazenz semiotischer Kontexturen

1. In Toth (2012a) waren folgende 4 Haupttypen semiotischer Abbildungen unterschieden worden:

morphismisch-semiosisch: $[A_\alpha \rightarrow I_\alpha]$

morphismisch-retrosemiosisch: $[A_\alpha \leftarrow I_\alpha]$

heteromorphismisch-semiosisch: $[A_\alpha \rightarrow I_\beta]$

heteromorphismisch-retrosemiosisch: $[A_\alpha \leftarrow I_\beta]$

(mit $\alpha \neq \beta$).

Nun ist eine tetradische Semiotik, welche nicht nur die semiosischen, sondern auch die retrosemiosischen Abbildungstypen kennt, notwendig mindestens eine tetradische Semiotik, denn der in Toth (2012b) für die logisch-epistemische Funktion des objektiven Subjektes bzw. für das "Außen von Innen" eines Zeichen-Objekt-Systems definierte konverse Abbildungstyp $[A \rightarrow I]° = [A \leftarrow I]$ tritt in der triadischen systemischen Zeichenrelation

$$ZR^3 = [[A \rightarrow I], [[A \rightarrow I] \rightarrow A], [[[A \rightarrow I] \rightarrow A] \rightarrow I]]$$

nicht auf. Ferner hat ZR^3 keine Kategorie für die ebenfalls durch $[A \leftarrow I]$ definierte Qualität mit der Funktion der Perspektivierung eines Systems (Toth 2012c).

2. Allerdings benötigt eine tetradische Semiotik hinwiederum, wie Kaehr (2009) in verschiedenen Aufsätzen gezeigt hatte, mindestens 3 Kontexturen. Da diese jedoch in 3! = 6 Permutationen, nämlich in den Ordnungen (α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) und (γ, β, α) auftreten können, von denen keine Ordnung zu einer andern isomorph ist, sprechen wir dann, wenn zwei von drei Kontexturen adjazent sind, d.h. wenn Transpositionen der als Normalordnung vorausgesetzten Ordnung (α, γ, β) vorliegt, von adjazenten semiotischen Kontexturen, deren Ordnung relativ zur Normalordnung wiederum invers sein kann, z.B. β und α in (β, α, γ), während α und γ weder adjazent noch invers in Bezug auf die Normalordnung sind. Auf diese Weise

erhält man also für eine hinblicklich der vier fundamentalen logisch-epistemischen Funktionen des subjektiven und objektiven Subjekts und Objekts minimalen tetradischen und trikontexturellen Semiotik nicht nur eine, sondern 6 semiotische Matrizen, deren allgemeine Form mit Normalform der Kontexturierung wie folgt aussieht:

	.a	.b	.c	.d
a.	—	$a.b_{\alpha,\beta,\gamma}$	$a.c_{\alpha,\beta,\gamma}$	$a.d_{\alpha,\beta,\gamma}$
b.	$b.a_{\alpha,\beta,\gamma}$	$b.b_{\alpha,\beta,\gamma}$	$b.c_{\alpha,\beta,\gamma}$	$b.d_{\alpha,\beta,\gamma}$
c.	$c.a_{\alpha,\beta,\gamma}$	$c.b_{\alpha,\beta,\gamma}$	$c.c_{\alpha,\beta,\gamma}$	$c.d_{\alpha,\beta,\gamma}$
.d	$d.a_{\alpha,\beta,\gamma}$	$d.b_{\alpha,\beta,\gamma}$	$d.c_{\alpha,\beta,\gamma}$	$d.d_{\alpha,\beta,\gamma}$

mit a. $\in$ {1, 2, 3} und .a, .b., .c., .d. $\in$ {0, 1, 2, 3}.

Es ist somit nötig, die bereits in Toth (2010) eingeführten triadischen und trichotomischen "Peirce-Zahlen" (td P, tt P) zu verwenden, da nur a $\in$ tt P den Wert 0 annehmen kann.

Literatur

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotic Short Studies. Glasgow 2009

Toth, Alfred, Annäherung zu systemischen Bi-Zeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012a

Toth, Alfred, Zum Rand von Zeichen und Objekt. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012b

Toth, Alfred, Qualität als Positionierung. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2012c

Aus Wahlfunktionen aus semiotischen Matrizen

1. Die zuletzt in Toth (2011b) präsentierte Hyper-Matrix

	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1									
2		K_{11}			K_{12}			K_{13}	
3									
1									
2		K_{21}			K_{22}			K_{23}	
3									
1									
2		K_{31}			K_{32}			K_{33}	
3									

in der jedes Subzeichen einer semiotischen Matrix dann eine eigene Kontextur zugewiesen bekommt, falls ihre zugehörige Matrix keine der beiden Diagonalen von Benses semiotischer Matrix enthält, kann durch die folgenden drei Ungleichungen charakterisiert werden

1. $(a.b)_{ij} \neq (b.a)_{ij}$,

2. $(a.b)_{ij} \neq (a.b)_{ji}$

3. $(a.b)_{ij} \neq (b.a)_{ji}$

2. Wie aus den Vorgängerarbeiten bekannt (vgl. z.B. Toth 2011a), ermöglichen die hier erarbeiteten Grundlagen, z.B. semiotische Matrizen wie die folgende zu konstruieren

$$\begin{pmatrix} 3.1 & 2.\underline{2} & 1.1 \\ 3.2 & 2.\underline{1} & 1.2 \\ 3.3 & 2.\underline{3} & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.1 & 2.\underline{2} & 1.1 \\ 3.2 & 2.\underline{3} & 1.2 \\ 3.3 & 2.\underline{1} & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.1 & 2.\underline{1} & 1.1 \\ 3.2 & 2.\underline{3} & 1.2 \\ 3.3 & 2.\underline{2} & 1.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.1 & 2.\underline{3} & 1.1 \\ 3.2 & 2.\underline{1} & 1.2 \\ 3.3 & 2.\underline{2} & 1.3 \end{pmatrix}$$

in denen zwar die Triaden, nicht aber die Trichotomien homogen sind. Es stellt sich daher die Frage, wie eine Zeichendefinition aussehen muß, welche dieser Tatsache Rechnung trägt. Offenbar kann man weiterhin ausgehen von

ZR = (3.a 2.b 1.c) mit a, b, c ∈ {1, 2, 3},

aber die von Bense so genannte „Wohlordnung“ ($a \leq b \leq c$) gilt nicht mehr. Da alle Permutationen der Trichotomienmenge {1, 2, 3} erlaubt sind, müssen auch sämtliche möglichen Ordnungen und ihre Kombinationen an Stelle der „Wohlordnung“ gelten. Wir müssen somit eine Auswahlfunktion ansetzen, welche die gewünschten Belegungen für alle Variablen in der den obigen Matrizen zugrunde liegenden allgemeinen Matrize

$$\begin{matrix} 3.a & 2.b & 1.c \\ 3.d & 2.e & 1.f \\ 3.g & 2.h & 1.i \end{matrix}$$

vornimmt, d.h. es muß gelten

(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) ∈ $\mathfrak{P}$(1, 2, 3). Wegen der in Toth (2011c) besprochenen Probleme muß jedoch an der paarweisen Verschiedenheit der drei Elemente jeder der drei Teilmengen festgehalten werden, so daß also zwei Tripel (a, b, c) und (a‘, b‘, c) genau dann gleich sind, wenn a = a‘, b = b‘ und c = c‘ ist. Man erhält auf diese Weise die trichotomischen Ordnungen

$a < b < c$	$a > b > c$	$a \leqq b \leqq c$	$a \geqq b \geqq c$	$a < b > c$	$a \leqq b \geqq c$
$a < b = c$	$a > b = c$	$a \leqq b = c$	$a \geqq b = c$	$a > b < c$	$a \geqq b \leqq c$
$a = b < c$	$a = b > c$	$a = b \leqq c$	$a = b \geqq c$		

unter gleichzeitiger Beibehaltung der triadischen Ordnung

3. > 2. > 1.

und damit innerhalb der Zeichendefinition zwei völlig verschiedene Zahlbegriffe, von denen nur noch derjenige der triadischen Ordnung dem Nachfolgeprinzip der Peano-Zahl entspricht (vgl. Bense 1975, S. 168 ff.). Mit der Eindeutigkeit der triadischen Peirce-Zahl geht somit eine Mehrdeutigkeit der trichotomischen Peirce-Zahl einher, allerdings ist diese Mehrdeutigkeit insofern determiniert, als dem einen Zahlenschema des Peirceschen Zeichens

ZR = (3.a 2.b 1.c) mit $a \leqq b \leqq c$

nunmehr 16 Zahlenschemata

ZR* = (3.a 2.b 1.c) mit $a, b, c \in \{(a < b < c), (a > b > c), (a \leqq b \leqq c), (a \geqq b \geqq c), (a < b > b), (a \leqq b \geqq c), (a < b = c), (a > b = c), (a \leqq b = c), (a \geqq b = c), (a > b < c), (a \geqq b \leqq c), (a = b < c), (a = b > c), (a = b \leqq c), (a = b \geqq c)\}$.

Da alle drei Variablen a, b, c mit den trichotomischen Werten 1, 2, 3 somit einschränkungslos belegt werden können, erhält man also 16 Ordnungstypen von je $3^3 = 27$ Zeichenklassen, zusammen also 432 verschiedene Zeichenklassen.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Subzeichen und ihre Kontexturen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a

Toth, Alfred, Transdyadizität und Transkontexturalität. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011b

Toth, Alfred, Die semiotische Matrix als Kontextur. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011c

Zwischenheit als semiotische Relation

1. Bildet man die Subzeichen der semiotischen Matrix, d.h. die dyadischen semiotischen Partialrelationen auf die Repräsentationswerte ab, so erhält man folgendes Bild:

		1.2		2.3	3.3	
	1.1	2.1	2.2	3.2		
SZ	2	3	4	5	6	Rpw,

d.h. zu Abbildungen sind nur im Falle von R(2, (1.1)) und R(6, (3.3)) eindeutig.

2. Wir wollen Zwischenheit für Subzeichen wie folgt definieren:

B((a.b), (a.b)) = Ø

B((a.b), (c.d)) = B((c.d), (a.b)) → (a.b) = (c.d)

Falls B((a.b), (c.d)) und B((a.b), (e.f)), dann gilt auch B((c.d), (e.f))

Zusätzlich vereinbaren wir:

B((a.b), (c.d)) gdw a < b oder b < d.

B ist somit eine nicht-reflexive, antisymmetrische und transitive Relation. Die zusätzliche Vereinbarung erlaubt die mehrdeutigen Abbildungen.

Damit haben wir also z.B.

(1.1) = B(Ø, 1.2) = B(Ø, 2.1) = B(Ø, 2.2) = B(Ø, 2.3) = B(Ø, 3.2) = B(Ø, 3.3),

d.h. man kann durch B topologische Filter definieren, so daß man z.B. hat

B(Ø, 1.2) = B(Ø, 2.1) ⊂ B(Ø, 2.2) ⊂ B(Ø, 2.3) ⊂ B(Ø, 3.2) ⊂ B(Ø, 3.3),

man beachte, daß Gleichheit und Mengeninklusion sich hier nicht ausschließen! Inhaltlich nähern wir uns hier den Definition der surrealen Zahlen (vgl. Toth 2011). Durch dieses Verfahren ist es somit möglich, Zwischenheit nicht nur entlang einer

Triade oder Trichotomie, sondern auch gemischt bzw. diagonal zu bestimmen – entsprechend den drei Typen von Peirce-Zeichen (vgl. Toth 2010).

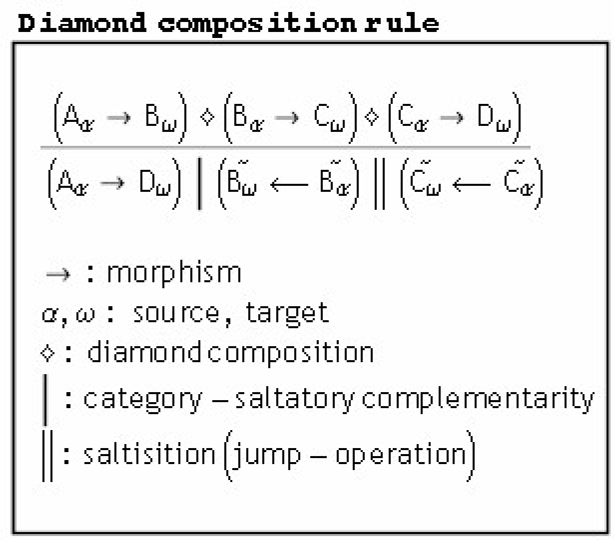
Bibliographie

Toth, Alfred, Kategorien und Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kat.%20u.-%20Peirce-Zahlen.pdf (2010)

Toth, Alfred, Peanozahlen und Conway-"Nimbers" als semiotische Basen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Peanozahlen%20und%20suurreale%20Z..pdf (2011)

Semiotische Vermittlungszahlen beim Übergang von Kategorien zu Saltatorien

1. Wir gehen aus von dem kürzlich von Kaehr (2011, S. 27) publizierten Schema der Komposition von Diamanten



Versucht man, dieses Schema auf die triadischen Peirceschen Zeichenklassen anzuwenden, so stößt man auf Schwierigkeiten. Zwar hatte bereits Walther (1979, S. 79) vorgeschlagen, Triaden als Kompositionen von zwei Dyaden aufzufassen:

Zkl = (3.a 2.b) ∘ (2.b 1.c) = (3.a 2.b 1.c),

aber diese in der Semiotik auch als Konkatenation bezeichnete Operation ist mit dem Kaehrschen Verfahren unvereinbar.

2. Allerdings kann man von dyadischen Zeichenrelationen der Form

ZR = ((a.b), (c.d)) (mit a, b, c, d ∈ {1, 2, 3})

ausgehen und sie, wie in Toth (2011) gezeigt, in der folgenden Form als Pseudo-Triaden notieren

ZR = ((a.b), (b.c), (c.d)).

Wie man sogleich sieht, entspricht diese Notation genau dem Kompositionsschema Kaehrscher Diamanten. Nehmen wir als Beispiel

ZR = ((1.2), (3.1))

dann haben wir

A = 1. C = 3.

B = .2 D = .1,

und somit ist

ZR = (1.2) ∘ (2.3) ∘ (3.1).

Nun können wir die kategorial-saltatorische Komplementarität

(1. → .1) | (.2~ ⟵ 2.~)

und die Saltisition (Jump-Operation)

(.3~ ⟵ 3.~)

bestimmen. Man beachte die triadischen Peirce-Zahlen der Form (a.) und die trichotomischen der Form (.a). Der Übergang von Kategorien zu Saltatorien beinhaltet also semiotisch nicht nur die Umkehrung der Abbildung, sondern auch den Wechsel von triadischem Haupt- und trichotomischem Stellenwert.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, The amazing power of Four. In: ThinkArtLab, http://www.thinkartlab.com/Memristics/Power%20of%20Four/Power%20of%20Four.pdf (2011)

Toth, Alfred, Pseudo-Triaden und Diamanten. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Pseudo-Triaden und Diamanten

1. Ich setze die Einführung semiotischer Diamanten in Toth (2008, S. 166 ff.) voraus. Ferner setze ich die Unterscheidung triadischer (semiotischer) Diamanten und tetradischer (semiotischer) Diamonds durch Kaehr (2008) voraus (die Differenz zwischen deutscher und englischer Bezeichnung reflektiert hier diejenige zwischen mono- und polykontexturaler logischer Basis).

2. Wir gehen aus von der in Toth (2011) eingeführten dyadisch-ternär-tetravalenten Zeichenrelation

$ZR = ((a.b), (c.d))$ mit $a, b, c, d \in \{1, 2, 3\}$.

Die dyadische Relation ZR kann man nun in ihrer Valenz sofort bedeutend erweitern (unter Beibehaltung ihrer dyadisch-ternären Struktur), indem man Hierarchien bildet:

$ZR' = (((a.b), (c.d)), ((e.f), (g.h)))$

$ZR'' = ((((a.b), (c.d)), ((e.f), (g.h))), (((i.j), (k.l)), ((m.n), (o.p))))$

...

3. Bleiben wir aber vorerst bei ZR. Man kann nun jede Dyade ZR^n für jedes $n \geq 1$ dadurch in eine Pseudo-Triade verwandeln, daß man

$ZR_{Tr} = ((a.b), (b.c), (c.d))$

bildet. Sei z.B. $(a.b) = (1.3)$ und $(c.d) = (2.3)$, dann bekommen wir folgende Diamantendarstellung:

$1.3 \longleftarrow \qquad 2.3$

$1.3 \rightarrow 3.2 \diamond 2.2 \rightarrow 2.3$

$1.3 \rightarrow 2.3$

Die Menge aller (b.c) ist also semiotisch gesehen die Menge aller zeicheninternen, d.h. semiosischen Vermittlungsrelationen zwischen den beiden dyadischen Relationen von ZR. Daraus resultiert, dann man für anwachsendes n für jedes ZR^n eine grössere Anzahl unterschiedlicher Vermittlungsrelationen benötigt; für ZR^2 (die Vermittlungsrelationen sind im folgenden fett markiert):

ZR^n = ZR' = (((a.b), **(b.c)**, (c.d)), **(d.e)**, ((e.f), **(f.g)**, (g.h)))

Eine Pseudo-Triade ist also nichts anderes als eine Kette. Ein bemerkenswertes Seiten-Ergebnis besteht darin, daß im System der 10 (triadischen) Peirceschen Zeichenklassen nur die Teilklasse der dicentischen Zeichenklassen Ketten darstellen können, da nur sie die für semiotische Ketten vorausgesetzte Struktur

Triadische Kette = ((3.2), (2.a) (c.d))

aufweisen. Tatsächliche gibt es aber keine einzige wohlgeformte, d.h. dem Ordnungsprinzip (3.a 2.b 1.c) mit $a \leq b \leq c$ folgende Peircesche Zeichenklasse

*(3.2 2.1 1.1)

*(3.2 2.2 2.a) ($a \in \{1, 2, 3\}$)

*(3.2 2.3 3.b) ($b \in \{1, 2, 3\}$)

4. Versuchen wir nun aber, auch ZR' als semiotischen Diamanten darzustellen:

$$(a.b) \longleftarrow \quad (g.h)$$

$$(a.b) \longleftarrow \quad (d.e) \diamond (d.e) \longleftarrow \quad (g.h)$$

$$((a.b) \rightarrow (b.c) \diamond (c.d) \rightarrow (d.e)) \diamond ((d.e) \rightarrow (e.f) \diamond (f.g) \rightarrow (g.h))$$

$$(a.b) \rightarrow (d.e) \diamond (d.e) \rightarrow (g.h)$$

$$(a.b) \rightarrow (g.h)$$

Zur Bestimmung der verschiedenen Typen von „bridges“ und „jumpings“ (vgl. Kaehr 2007, S. 12 ff.) kann man sich nun fragen, welche der Subzeichen einer beliebigen Relation ZR^n man miteinander semiotisch verbinden kann. Wie Kaehr (2009) ferner gezeigt hat, tut man dies am besten mit Hilfe von „matching conditions“, dadurch kann man nicht nur homogene, sondern auch inhomogene semiotische Zusammenhänge (nach Kaehr „textemes“) herstellen. Ferner muss man, wie ich in einer früheren Arbeit gezeigt habe, zwischen triadischen und trichotomischen „Peirce-Zahlen“ unterscheiden. Im Falle des obigen Beispiels ZR^2 haben wir damit

Monadische homogene Matches: z.B. a. ≡ c.

Monadische heterogene Matches: z.B. .a ≡ c.

Monadische ambivalente Matches: z.B. .a. ≡ c. und .a. ≡ .c

Dyadische homogene Matches: (d.e) ≡ (d.e)

Dyadische inhomogene Matches: z.B. (a.b) ≡ (d.e)

Triadische inhomogene Matches: z.B. (a.b.c) ≡ (d.e.f) [vgl Kaehrs „risky bridges”, 2007, S. 12]

Tetradische inhomogene Matches: z.B. (a.b.c.d) ≡ (e.f.g.h)

Es gibt zwar keine homogene triadischen und höheren Matches, aber man kann eine große Anzahl von ambivalenten Matches konstruieren, z.B. (.a. .b f. .h) ≡ (.h .g. a. .b) usw.

Zusammenfassend dürfte klar werden, daß die Einführung von Pseudo-Triaden in dyadischen Zeichenrelationen nicht nur zu einer Erweiterung der semiotischen Diamantentheorie führt, sondern daß in Sonderheit durch Kaehrs Entdeckung der matching conditions sich eine sehr große und bisher ungeahnte Menge von semiotischen Relationen eröffnet.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007

Kaehr, Rudolf, Toth's semiotic diamonds. In: ThinkArtLab, http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Toth-Diamanten/Toth-Diamanten.pdf (2008)

Kaehr, Rudolf, Xanadu's textemes. In: ThinkArtLab, http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Toth-Diamanten/Toth-Diamanten.pdf (2009)

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Einführung eines dyadisch-ternär-tetravalenten Zeichenmodells. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Transitorische Morphismen als natürliche Transformationen

1. Wenn wir von der von Bense (1975) eingeführten großen semiotischen Matrix

		M			O			I		
		Qu 1.1	Si 1.2	Le 1.3	Ic 2.1	In 2.2	Sy 2.3	Rh 3.1	Di 3.2	Ar 3.3
M	Qu 1.1	Qu-Qu 1.1 1.1	Qu-Si 1.1 1.2	Qu-Le 1.1 1.3	Qu-Ic 1.1 2.1	Qu-In 1.1 2.2	Qu-Sy 1.1 2.3	Qu-Rh 1.1 3.1	Qu-Di 1.1 3.2	Qu-Ar 1.1 3.3
	Si 1.2	Si-Qu 1.2 1.1	Si-Si 1.2 1.2	Si-Le 1.2 1.3	Si-Ic 1.2 2.1	Si-In 1.2 2.2	Si-Sy 1.2 2.3	Si-Rh 1.2 3.1	Si-Di 1.2 3.2	Si-Ar 1.2 3.3
	Le 1.3	Le-Qu 1.3 1.1	Le-Si 1.3 1.2	Le-Le 1.3 1.3	Le-Ic 1.3 2.1	Le-In 1.3 2.2	Le-Sy 1.3 2.3	Le-Rh 1.3 3.1	Le-Di 1.3 3.2	Le-Ar 1.3 3.3
O	Ic 2.1	Ic-Qu 2.1 1.1	Ic-Si 2.1 1.2	Ic-Le 2.1 1.3	Ic-Ic 2.1 2.1	Ic-In 2.1 2.2	Ic-Sy 2.1 2.3	Ic-Rh 2.1 3.1	Ic-Di 2.1 3.2	Ic-Ar 2.1 3.3
	In 2.2	In-Qu 2.2 1.1	In-Si 2.2 1.2	In-Le 2.2 1.3	In-Ic 2.2 2.1	In-In 2.2 2.2	In-Sy 2.2 2.3	In-Rh 2.2 3.1	In-Di 2.2 3.2	In-Ar 2.2 3.3
	Sy 2.3	Sy-Qu 2.3 1.1	Sy-Si 2.3 1.2	Sy-Le 2.3 1.3	Sy-Ic 2.3 2.1	Sy-In 2.3 2.2	Sy-Sy 2.3 2.3	Sy-Rh 2.3 3.1	Sy-Di 2.3 3.2	Sy-Ar 2.3 3.3
I	Rh 3.1	Rh-Qu 3.1 1.1	Rh-Si 3.1 1.2	Rh-Le 3.1 1.3	Rh-Ic 3.1 2.1	Rh-In 3.1 2.2	Rh-Sy 3.1 2.3	Rh-Rh 3.1 3.1	Rh-Di 3.1 3.2	Rh-Ar 3.1 3.3
	Di 3.2	Di-Qu 3.2 1.1	Di-Si 3.2 1.2	Di-Le 3.2 1.3	Di-Ic 3.2 2.1	Di-In 3.2 2.2	Di-Sy 3.2 2.3	Di-Rh 3.2 3.1	Di-Di 3.2 3.2	Di-Ar 3.2 3.3
	Ar 3.3	Ar-Qu 3.3 1.1	Ar-Si 3.3 1.2	Ar-Le 3.3 1.3	Ar-Ic 3.3 2.1	Ar-In 3.3 2.2	Ar-Sy 3.3 2.3	Ar-Rh 3.3 1.3	Ar-Di 3.3 3.2	Ar-Ar 3.3 3.3

ausgehen, erkennen wir, dass die aus kartesischer Produktbildung entstandenen Paare von Dyaden die Struktur

A = ((a.b), (c.d)) mit a, ..., d ∈ {1, 2, 3}

haben.

2. Will man also die Übergänge zwischen zwei Paaren von Dyaden-Paaren bestimmen, muß man von der Struktur

T(A, B) = (((a.b), (c.d)), ((e.f), (g.h)))

ausgehen. Dabei gibt es entsprechend den drei Peirce-Zahlen (vgl. Toth 2010) drei verschiedene Möglichkeiten:

1. Triadische Transitionen

Z.B. ((3.1), (1.1)) → ((3.2), (1.1))

2. Trichotomische Transitionen

Z.B. ((3.1), (1.1)) → ((3.1), (1.2))

3. Diagonale Transitionen

Z.B. ((3.1), (1.1)) → ((3.2), (1.2))

Wenn wir mit abstrakten Strukturen operieren, gilt also für T(A, B):

a) Falls b = f ist: T = [[[a→e], id_b], [[c→g], [d→h]]] (Triadischer Fall)

b) Falls a = e ist: T = [[[id_a, [b→f]], [[c→g], [d→h]]] (Trichotomischer Fall)

c) Falls f = (b+1), h = T = (d+1) ist:

T = (Diag. Fall)

4. Es gelte nun für beliebige Paare <x, y> ∈ M = {a, b, c, d}:

<x, y> ∈ {α, β, id_x} mit x ∈ {1, 2, 3} sowie allen Komponierten und Inversen. Dann kann man als unmittelbare Nachbarschaft U einer natürlichen Transformation T_i festsetzen:

$U(T_i) = \{T_{i-1}, T_i, T_{i+1}\}$,

wobei T_n triadisch, trichotom oder diagonal sein kann. Es ist also, wenn wir

T_i = (((a.b), (c.d)), ((e.f), (g.h)))

setzen,

$U(T_i)$ = {[[[a→e], id_b], [[c→g], [d→h]]], [[[id_a, [b→f]], [[c→g], [d→h]]], [[[a→e], [b→(b+1)], [[c→g],[d→(d+1)]]].

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Zeichenklassen und ihre Umgebungen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Zkln%20u.%20Umg..pdf (2010)

Involvations- und Replikationsmengen

1. Die Subzeichen, wie sie in Form der kartesischen Produkte der kleinen (oder auch grossen) semiotischen Matrix erscheinen, sind, ähnlich wie die Elektronen in der Physik, Doppelnaturen, insofern sie einerseits statische Momente, anderseits dynamische Semiosen repräsentieren. So steht z.B. das Sinzeichen (1.2) einerseits für die quantitative Erstheit, den singulären Mittelpunkt sowie modal für die Wirklichkeit der Möglichkeit, anderseits aber involviert es das Qualizeichen (1.1) und repliziert es das Legizeichen und steht damit zwischen reiner Qualität, Erstheit der Erstheit oder Möglichkeit der Möglichkeit einerseits und essentieller Erstheit, Drittheit der Erstheit oder Notwendigkeit der Erstheit andererseits (vgl. z.B. die Tabelle in Bense 1979, S. 61).

2. Wie ich in meinen Studien zu den sog. Peirce-Zahlen nachgewiesen hatten, gibt es sehr interessante algebraischen Beziehungen eines bestimmten Subzeichens nicht nur in seiner Trichotomie, sondern auch in seiner Triade und selbst in seiner (Haupt- oder Neben-) Diagonale. Schreibt man also (a.b) für die allgemeine Form eines Subzeichens (d.h. a, b $\in$ {1, 2, 3}), so ist

$\{(a.b)^{\rightarrow}\} = \{(c.d) \mid a = c \wedge d > b\}$

die Menge aller trichotomischen Replikationen von (a.b),

$\{(a.b)^{\leftarrow}\} = \{(c.d) \mid a = c \wedge d < b\}$

die Menge aller trichotomischen Involvationen von (a.b),

$\{(a.b)^{\downarrow}\} = \{(c.d) \mid b = c \wedge c > a\}$

die Menge aller triadischen Replikationen von (a.b), und

$\{(a.b)^{\uparrow}\} = \{(c.d) \mid b = c \wedge c < a\}$

die Menge aller triadischen Involvationen von (a.b).

Wenn wir die diagonalen Peirce-Zahlen hinzunehmen, dann ist

$\{(a.b)^{\searrow}\} = \{(c.d) \mid c = d\}$

die Menge aller hauptdiagonalen und

$\{(a.b)^{\nwarrow}\} = \{((c-1).(d+1)),(c.d), ((c+1).(d-1))\}$

ist die Menge aller nebendiagonalen Peirce-Zahlen.

Wenn wir wie üblich Tt für Trichotomie, Td für Triaden, HD für Hauptdiagonale und ND für Nebendiagonale setzen, dann haben wir also in aufzählender Form z.B.

$(1.1)^{\leftarrow} = \emptyset$ (hier erübrigt es sich, die Art der Peirce-Zahl anzugeben, da auch $(1.1)^{\uparrow} = \emptyset$ gilt)

$(1.2)_{Tt}{}^{\rightarrow} = \{(1.3)\}$

$(1.3)_{Tt}{}^{\leftarrow} = \{(1.1), (1.2)\}$

$(2.3)_{Td}{}^{\rightarrow} = \{(3.3)\}$

$(3.2)_{Tt,Td}{}^{\leftarrow} \{(3.1), (2.2), (1.2)\}$

Wie man leicht erkennt, kann man mit Hilfe der Involvations- und Replikationsoperatoren sowie den drei Arten von Peirce-Zahlen und deren Kombinationen alle Subzeichen zu beliebigen Mengen zusammenfassen.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

“Ich und Du und Du und ich – es Paar” (Kurt Früh)

1. Der Text im Titel ist Teil des Liedes, das der Charakter Julia Zimmerlin (Elvira Schalcher in der schweizerdeutschen Version) in Kurt Frühs Musical „Der 42. Himmel“ (1963) singt und den der sie anbetende Charakter Wendelin Pfannenstil (Walter Roderer) später im Trauungszimmer wiederholt.

2. Wir haben es offenbar mit einer nicht-kommutativen Addition zu tun

Subjektives Subjekt + subjektives Objekt ≠

Subjektives Objekt + subjektives Subjekt.

Das Lied behauptet ferner die Gültigkeit der folgenden Gleichung (mit SS und SO als verwendete Abkürzungen)

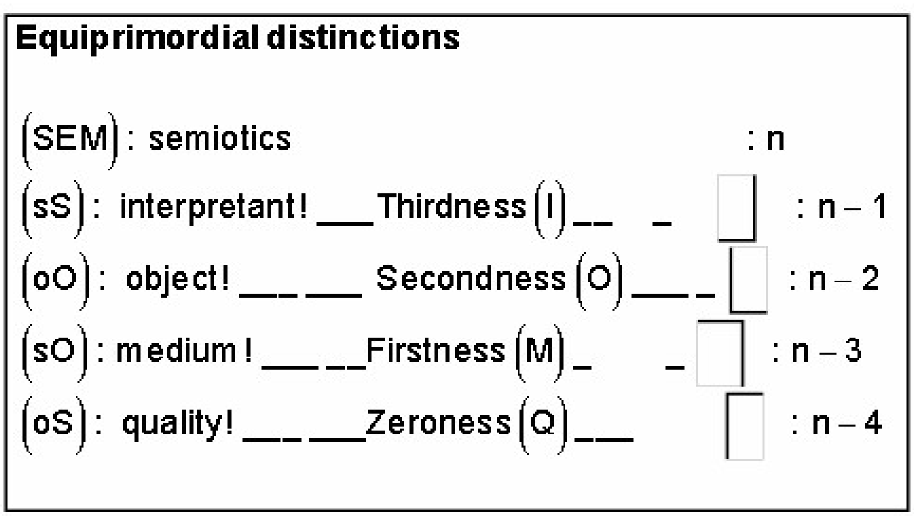
(SS + SO) + (SO + SS) = 2,

wobei zwei die Verschmelzung von SS und OS bedeutet, das ist aber S, somit

(SS + SO) + (SO + SS) = S.

Nun ist nach Bense das Zeichen als „Disjunktion zwischen Welt und Bewusstsein“ aufzufassen (1975, S. 16), d.h. in der Dichotomie von Zeichen und Objekt ist das Zeichen Subjekt und das Objekt natürlich Objekt.

Zieht man nun die Kaehrsche Korrespondenzentabelle heran (Kaehr 2011):



so sieht man, dass ferner

SS = I

SO = M

gilt. Damit bekommen wir

(I + M) + (M + I) = Z

oder mit Hilfe von Peirce-Zahlen

(.3. + .1.) + (.1. + .3.) = (.1., .2., .3.),

d.h. es genügt offenbar ein Mittel und ein Interpretant, um einen Objektbezug zu ersetzen. Von der semiotischen Arithmetik her ist die Nicht-Kommutativität der Addition ausreichend, um durch Summierung eines geordneten Paares und seines inversen Paares ein Tripel zu bekommen.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Früh, Kurt, Der 42. Himmel. 1963 Zürich (Präsens-Film)

Zopfbewegungen 3-dimensionaler Semiosen

1. Zöpfe (braids) wurden bereits in Toth (2011) in die Semiotik eingeführt. Hier bringen ich nochmals die entscheidende Definition Artins, die auch der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt:

> „Im Raum sei ein Rechteck mit Gegenseiten g_1, g_2 bzw. h_1, h_2 (der „Rahmen" von Z) vorgelegt. Auf jeder der beiden Seiten g_1 und g_2 seien n Punkte $A_1 A_2 \ldots A_n$ bzw. $B_1 B_2 \ldots B_n$ gegeben, wobei der Sinn der Numerierung von h_1 nach h_2 laufe. Jedem Punkte A_i sei eindeutig ein Punkt B_{r_i} zugeordnet, mit dem er durch eine doppelpunktfreie Raumkurve μ_i verbunden ist, die keine andere Kurve μ_k schneidet." (Artin 1925, § 2.)

Zwei willkürliche dyadisch-tetravalente semiotische Zöpfe sind.

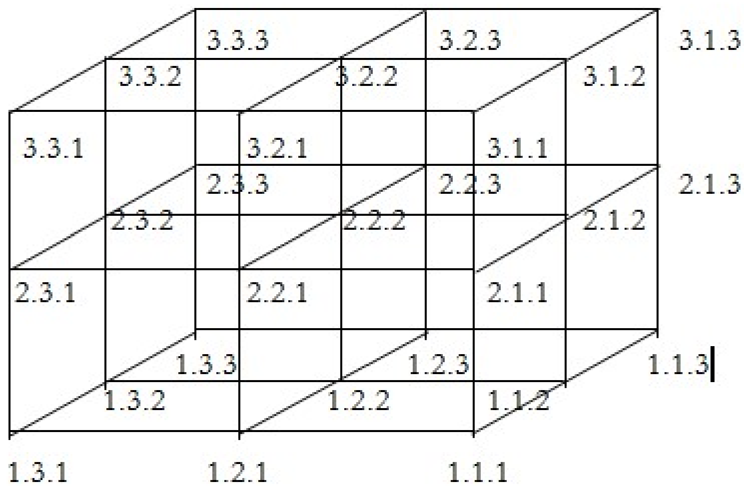
--- (0.b) --- (1.d) --- (2.c) --- (3.a) ---   --- (0.b) --- (1.d) --- (2.c) --- (3.a) ---

--- (0.b) --- (1.d) --- (2.c) --- (3.a) ---   --- (1.d) --- (2.c) --- (3.a) --- (0.b) ---

Dabei treten bereits in der zugrunde gelegten 2-dimensionalen Semiotik neben dem 2-dimensionalen Morphismus zwei Typen 3-dimensionaler Morphismen auf, so dass wir folgendes basales 3er-System haben:

$$(a.a) \left\{ \begin{array}{c} \text{--------->} \\ \text{-- ⋰⋱-->} \\ \text{-- ⋱⋰-->} \end{array} \right\} (a.a.) \qquad (a \in \{0, 1, 2, 3\})$$

2. Der von Stiebing (1978, S. 77) konstruierte 3-dimensionale sog. Zeichen-Kubus



basiert auf der triadisch-trichotomischen, aber nicht notwendig trivalenten allgemeinen Struktur

SZ-3 = (a.b.c),

worin b, c ∈ {1, 2, 3}, aber a ∈ {±ℕ} und wobei b triadische, c trichotomische Peirce-Zahl, jedoch a Dimensionszahl ist.

Das Artinsche Modell 3-dimensionaler Zopfbewegung, das hier aus Epple (1999, S. 317) reproduziert wird:

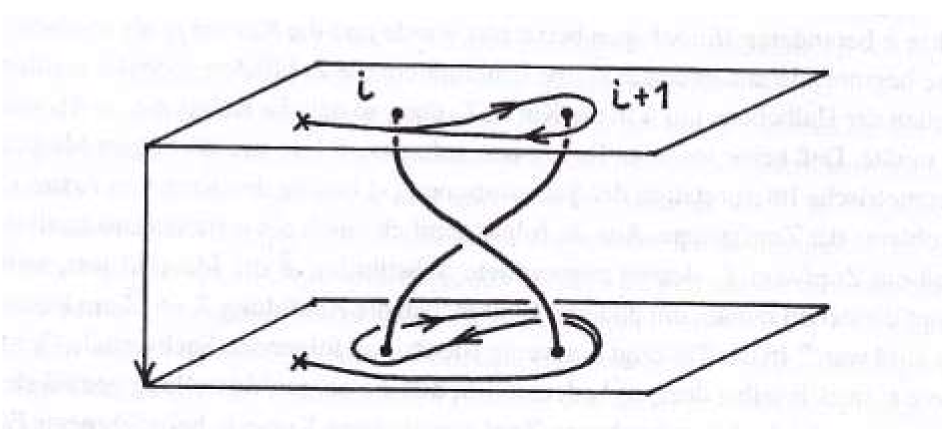
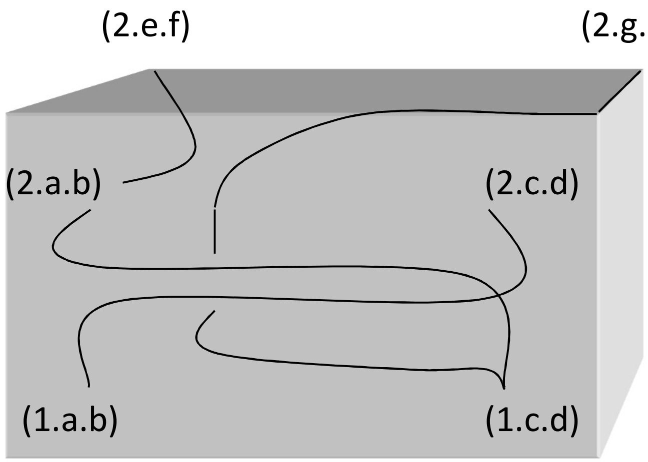


Fig. 10.8: Zwei Positionen einer beweglichen Ebene und Wirkung von σ_i auf t_{i+1}

lässt sich nun auf den Stiebingschen Kubus übertragen, wenn dieser als auch $3 \times 3 \times 3 = 27$ 3-dimensionalen semiotischen „Zellen“ zusammengesetzt betrachtet wird, welche die folgende Grundstruktur haben, in die wiederum willkürliche Zöpfe eingezeichnet sind (wobei nur die durch die Zöpfe verbundenen Knoten eingezeichnet sind):



Bibliographie

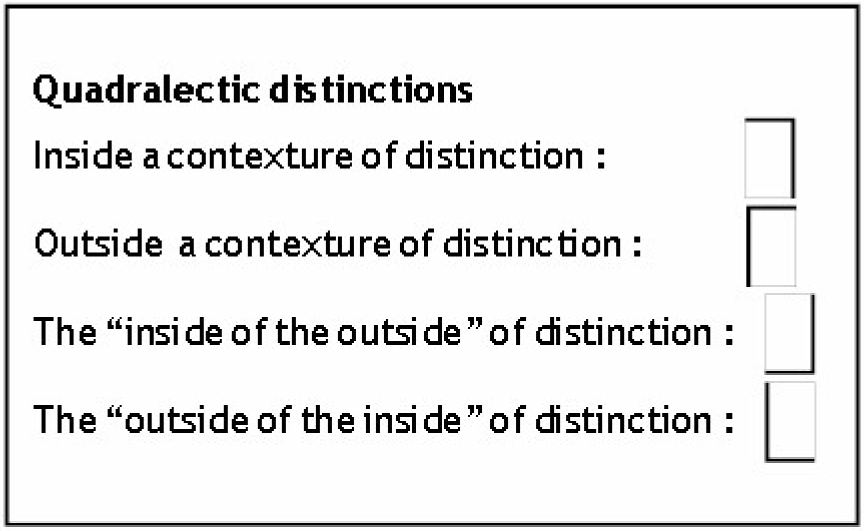
Epple, Moritz, Die Entstehung der Knotentheorie. Braunschweig 1999

Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978

Toth, Alfred, Darstellung des Zeichenmodells als Artinscher Zopf. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Quadralektische Distinktionen, Ligaturen und Gestalten

1. Man kann die von Rudolf Kaehr in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit zusammengestellten „quadralektischen Distinktionen“ (Kaehr 2011, S. 12)



in der folgenden Tabelle mit ihren logisch-epistemologischen, fundamental-kategorialen und semiotischen Entsprechungen zusammenbringen:

oS ↔ Q (.0.) ↔ oI ↔ └

sO ↔ M (.1.) ↔ iO ↔ ┘

oO ↔ O (.2.) ↔ oO ↔ ┌

sS ↔ I (.3.) ↔ iI ↔ ┐

2. Eine Besonderheit dieser Korrespondenzen liegt darin, dass sie die Differenz zwischen semiotischem Haupt- und Stellenwert bzw. zwischen triadischer und trichotomischer Peirce-Zahl hintergehen. Diese Tatsache erlaubt uns, die semiotische Matrix Benses rein systemtheoretisch zu notieren:

	⌊	⌋	⌈	⌉
⌊	⌊ ⌊	⌊⌋	⌊ ⌈	⌊⌉
⌋	⌋ ⌊	⌋ ⌋	⌋ ⌈	⌋ ⌉
⌈	⌈ ⌊	⌈⌋	⌈ ⌈	⌈⌉
⌉	⌉ ⌊	⌉ ⌋	⌉ ⌈	⌉ ⌉

Eine tetradisch-tetravalente Zeichenklasse hat daher die allgemeine Form:

Zkl$_4^4$ = (⌊a ⌋ b ⌈c ⌉ d) mit a...d ∈ { ⌊, ⌋ , ⌈, ⌉ }.

Für die Dualisation gilt:

(× ⌊) = (×.0.) = ⌋ = (.1.), d.h. ⌊ × ⌋

(× ⌈) = (×.2.) = ⌉ = (.3.), d.h. ⌈ × ⌉

Demgegenüber bilden

(.0.)/(.2.) = ⌊ ⌈

(.0.)/(.3.) = ⌊⌉

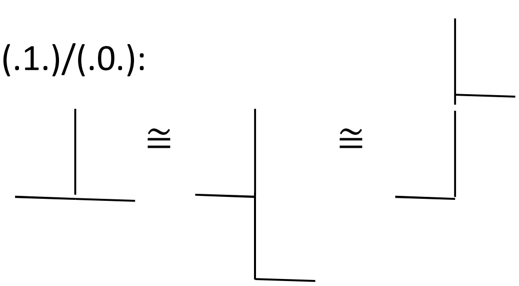
(.1.)/(.2.) = ⌋ ⌈

(.1.)/(.3.) = ⌋ ⌉

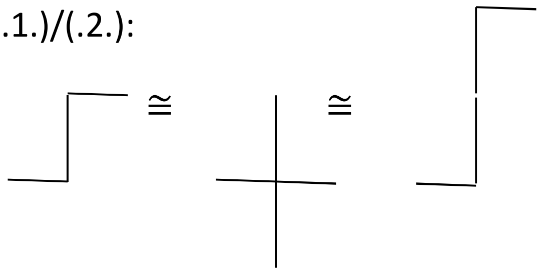
keine Gestaltpaare.

Allerdings kann man alle 4 Zeichengestalten zu Mengen isomorpher „Ligaturen“ zusammenfassen, vgl. z.B.

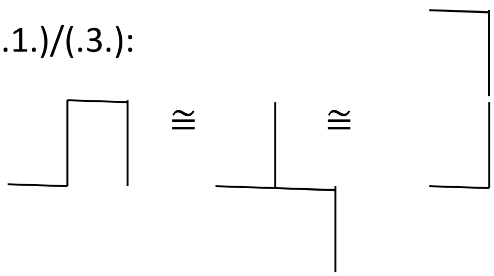
(.1.)/(.0.):



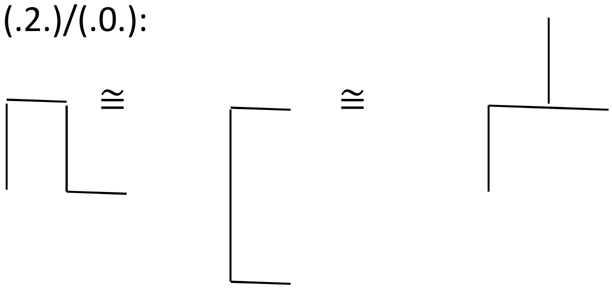
(.1.)/(.2.):



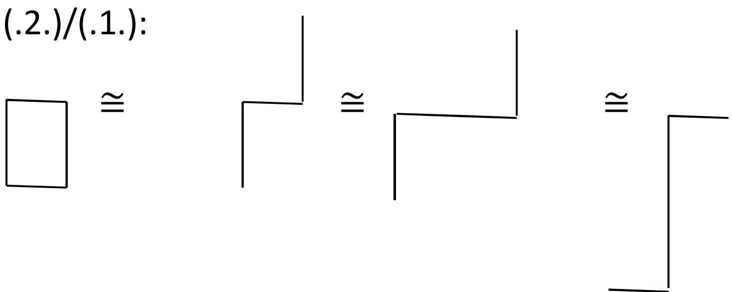
(.1.)/(.3.):



(.2.)/(.0.):

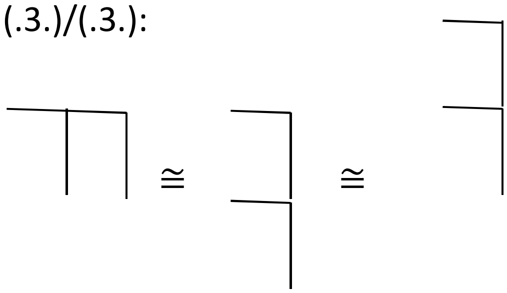


(.2.)/(.1.):



...

(.3.)/(.3.):



(!!)

Wird also neben der Dichotomie Innen/Aussen auch diejenige zwischen Oben/Unten einbezogen, dann verliert sich natürlich der isomorphe Status der meisten der oben präsentierten Zeichengestalten. Der Zeichentext wird dann zur Partitur.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Diamond Calculus of Formation of Forms. http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Diamond%20Calculus/Diamond%20Calculus.pdf (2011)

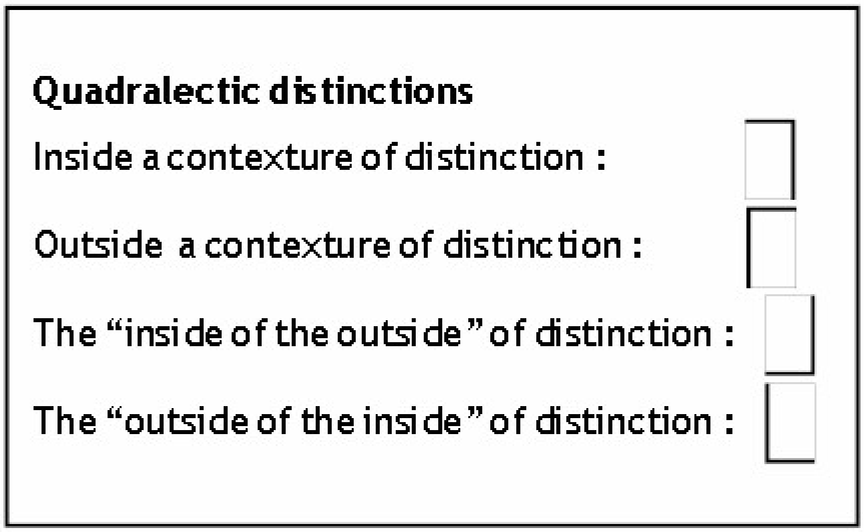
Quadralektische Distinktionen zur systemtheoretischen Notation von Zeichenprozessen

1. In Toth (2011) hatte ich die Korrespondenzen zwischen der formativen Basisunterscheidung zwischen Innen und Aussen und den entsprechenden kenogrammatischen, logisch-epistemologischen, fundamentalkategorialen sowie numerisch-semiotischen Begriffen wie folgt dargestellt:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Innen} \ulcorner \text{Aussen} & \\
 & \downarrow & \\
 & [\bigcirc \ulcorner \square] \ulcorner [\square \ulcorner \bigcirc] & \\
 & \downarrow & \\
 & [sS \ulcorner oS] \ulcorner [oO \ulcorner sO] & \\
 & \downarrow & \\
 & [I \ulcorner Q] \ulcorner [O \ulcorner M] & \\
 & \downarrow & \\
 & [(3.a \ulcorner 0.d] \ulcorner [2.b \ulcorner 1.c] & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Subjekt} & & \text{Objekt} \\
 \text{(System)} & & \text{(Umgebung)}
\end{array}$$

wobei für die Zeichenklassen a, b, c, d ∈ {0, 1, 2, 3} gilt. Wie man sieht, läuft diese systemtheoretische Unterscheidung – die natürlich bereits in der Spencer Brownschen Dichotomie von „Leere“ vs. „Distinktion“ angelegt ist, auf ein Zeichenmodell heraus, das aus einer Dyaden von Dyaden besteht und in dessen Struktur sich das Verhältnis von Repräsentation von Subjekt- und Objektpol, das bei Peirce über ein ganzes, aus Zeichen- und Realitätsthematik bestehendes Dualsystem distribuiert ist, innerhalb einer einzigen Repräsentationsklasse, bestehend aus 4 anstatt 3 Fundamentalkategorien und ebenso viele Werten, d.h. einem balancierten System, spiegelt. Anders gesagt: Wie jede Peircesche Zeichenklasse ihre duale Realitätsthematik enthält, enthält jede dyadische Zeichenrelation nicht nur ihr eigenes System, sondern auch ihre eigene Umgebung, allerdings in einer und nicht in zwei dual miteinander verbundenen Repräsentationsrelationen.

2. Nun hat Rudolf Kaehr eine Art von universaler Notation für das, was er „quadralektische Distinktionen“ nennt, eingeführt (Kaehr 2011, S. 12):



Wegen den oben tabellierten Korrespondenzen bekommen wir somit

oS ↔ Q (.0.) ↔ oI ↔ ⌊

sO ↔ M (.1.) ↔ iO ↔ ⌋

oO ↔ O (.2.) ↔ oO ↔ ⌈

sS ↔ I (.3.) ↔ iI ↔ ⌉

Weil in dieser Notation also der Unterschied zwischen triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen aufgehoben ist, kann sie zur formalen Notation von Zeichenklassen und anderen Zeichenrelationen verwendet werden:

(⌉ .⌋ ⌈.⌋ ⌋ .⌋)

(⌉ .⌋ ⌈.⌋ ⌋ . ⌈)

(⌉ .⌋ ⌈.⌋ ⌋ .⌉)

(⌉ .⌋ ⌈. ⌈ ⌋ . ⌈)

(┐ .┘ ┌. ┌ ┘ .┐)

(┐ .┘ ┌.┐ ┘ .┐)

(┐ . ┌ ┌. ┌ ┘ . ┌)

(┐ . ┌ ┌. ┌ ┘ .┐)

(┐ . ┌ ┌.┐ ┘ .┐)

(┐ .┐ ┌.┐ ┘ .┐)

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Diamond Calculus of Formation of Forms. http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Diamond%20Calculus/Diamond%20Calculus.pdf (2011)

Toth, Alfred, Subjektivität und Objektivität des architektonischen Objektes. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Die diesseitige Transzendenz der Zeichen

1. Wenn man die Menge der natürlichen Zahlen auf eine ihrer Teilmengen abbildet:

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1 3 5 7 9 ...

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

2 4 6 8 10 ...

1 2 3 4 5 ...

↑ ↑ ↑ ↑ ↑

2 3 5 7 11 ...,

dann sind alle diese Teilmengen immer noch gleichmächtig mit der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$, d.h. es ist

$|\mathbb{Z}|^{+} = |\mathbb{Z}|^{-} = |\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

(vgl. z.B. Ebbinghaus 1994, S. 139). Da also alle diese Mengen abzählbar unendlich sind, gelten die folgenden transfiniten arithmetischen Gesetze:

a) $\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

c) $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

d) $\aleph_0 = \aleph_0^{n}$

e) $\aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$

2. Die transfinite Addition unterscheidet sich somit in grundlegender Weise von der finiten. Diesen Sachverhalt hat Kronthaler richtig dahingehend interpretiert, dass er von „qualitativen Abbrüchen“ zwischen den einzelnen transfiniten Zahlklassen ausging:

$\aleph_0 \quad \lceil \quad \aleph_1 \quad \lceil \quad \aleph_2 \quad \lceil \quad \ldots$

Der Aufbau von $\mathbb{N}$ ist additiv, der von TZ superadditiv (etwa bzgl. des Maßes der Mächtigkeit):[269] $\mathrm{card}\ T_n + \mathrm{card}\ T_m \lessdot \mathrm{card}\ T_{n+m}$, $\forall\ n,m \in \mathbb{N}$.

Allerdings zeigt dies nur einen quantitativen Aspekt des Vergleichs. Zu beachten ist, daß in der A-Mathematik die Additivität NUR im Endlichen gilt, Σ Teile = Ganzes, im Unendlichen dagegen im gewissen Sinne das paradoxe Gegenteil:

$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^{\,n}$

mehr noch: Das Unendliche wird ja gerade dadurch definiert, daß ein Teil nicht länger kleiner als das Ganze sein muß, sondern ihm gleichen kann:

vgl. $\mathrm{card}(\{1,2,3,4,5,\ldots\}) = \mathrm{card}(\{2,4,6,8,\ldots\})$

Allein dies sollte den QUALITATSUNTERSCHIED zwischen Endlichem und Unendlichem (und allgemein zwischen den verschieden Alephs $\aleph$) zeigen.

Etwas ist nur relativ Größe oder Nichtgröße. Es ist nur in Beziehung auf andere Größen...eins von beiden. Es giebt also nur verschiedene Arten von Größen, die in Beziehung aufeinander nie ganz (abso[lut]) vereinigt, aber relativ, zur Nothdurft, vereinigt, in Eine Gattung gebracht oder gegeneiander bestimmt werden können. Novalis(119),3,136*

**Die QUALITATIVE UNTERSCHIEDENHEIT DER ENDLICHEN und UNENDLICHEN GRÖßEN WIRD AUCH HIER ERKANNT. Hamburger (56), S. 77*

Auch durch die Superadditivität kann mit TZ höchstens die $\aleph_0$–Mächtigkeit erreicht werden, und dies auch nur im Grenzfall ($\S 2$). Die Frage lautet aber nicht mehr, ob mit Hilfe der Superadditivität oder MdQ..,höhere Mächtigkeiten als $\aleph_0$ erreichbar sind, sondern zur quantitativen Betrachtungsweise muß eine qualitative hinzutreten.

Für die Kardinaltität sind die Unterschiede der Alephs $\aleph$ von Cantors $\daleth$–Reihe nämlich tatsächlich keine der Quantität mehr, sondern der Qualität; genauso wie für die Ordinalität jeder Hiatus in der transifiniten Zählreihe die Kontexturgrenze zweier verschiedener Qualitäten darstellt, d.h. $1, \omega, \omega\cdot 2, \omega\cdot 3, \ldots$ sind diskontextural. Jedes Aleph steht auf einer anderen Reflexionsebene, genauso wie jedes Omega. Zwar sind die Alephs der "Größe" nach anzuordnen, sie bleiben aber quantitativ unvergleichbar: diese $\daleth$–Ordnung ist eine der Qua-

das Quantum ist die aufgehobene Qualität Hegel (57), 5. S.279

Die Unendlichkeit des Quantums ist dahin bestimmt worden, daß sie das negative Jenseits desselben ist, das es aber an ihm selbst hat. DIES JENSEITS IST DAS QUALITATIVE ÜBERHAUPT, Hegel(57),5, S.372

In der klassischen Mathematik gibt es also qualitative Unterschiede erst im Unendlichen. **Etwas vereinfacht gesagt, liegt der Grund darin, dass im finiten Bereich eine Zahl der Form (k+1) eben nur die Stelle (k+1) in der betreffenden Zahlenreihe repräsentiert, aber nicht die um 1 vermehrte Menge {k} ihrer Vorgängerzahlen**, d.h. es gilt NICHT: $1 \subset 2 \subset 3 \subset \ldots \subset n$ ($n \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{R}$, usw.).

Genauso ist es aber in der Peirceschen Semiotik, die in dieser Hinsicht eine bereits von Maser (1973, S. 37) festgestellte transklassische Struktur aufweist, insofern die vollständige Definition der Zeichenrelation nach Bense (1979, S. 53) wie folgt ist:

$ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$,

d.h. hier gilt im Gegensatz zur klassischen Mathematik

$1 \subset 2 \subset 3 \; (\subset ...)$.

In anderen Worten: **Die Drittheit vereinigt die Menge der Erstheit und der Zweitheit und zeigt nicht nur eine Nachfolgerelation der Zweitheit an.** Aus diesem Grunde kann man leicht zeigen, dass sich in der semiotischen Mathematik die Unendlichkeit und mit ihr die Qualität bereits im „finiten" Bereich zeigt:

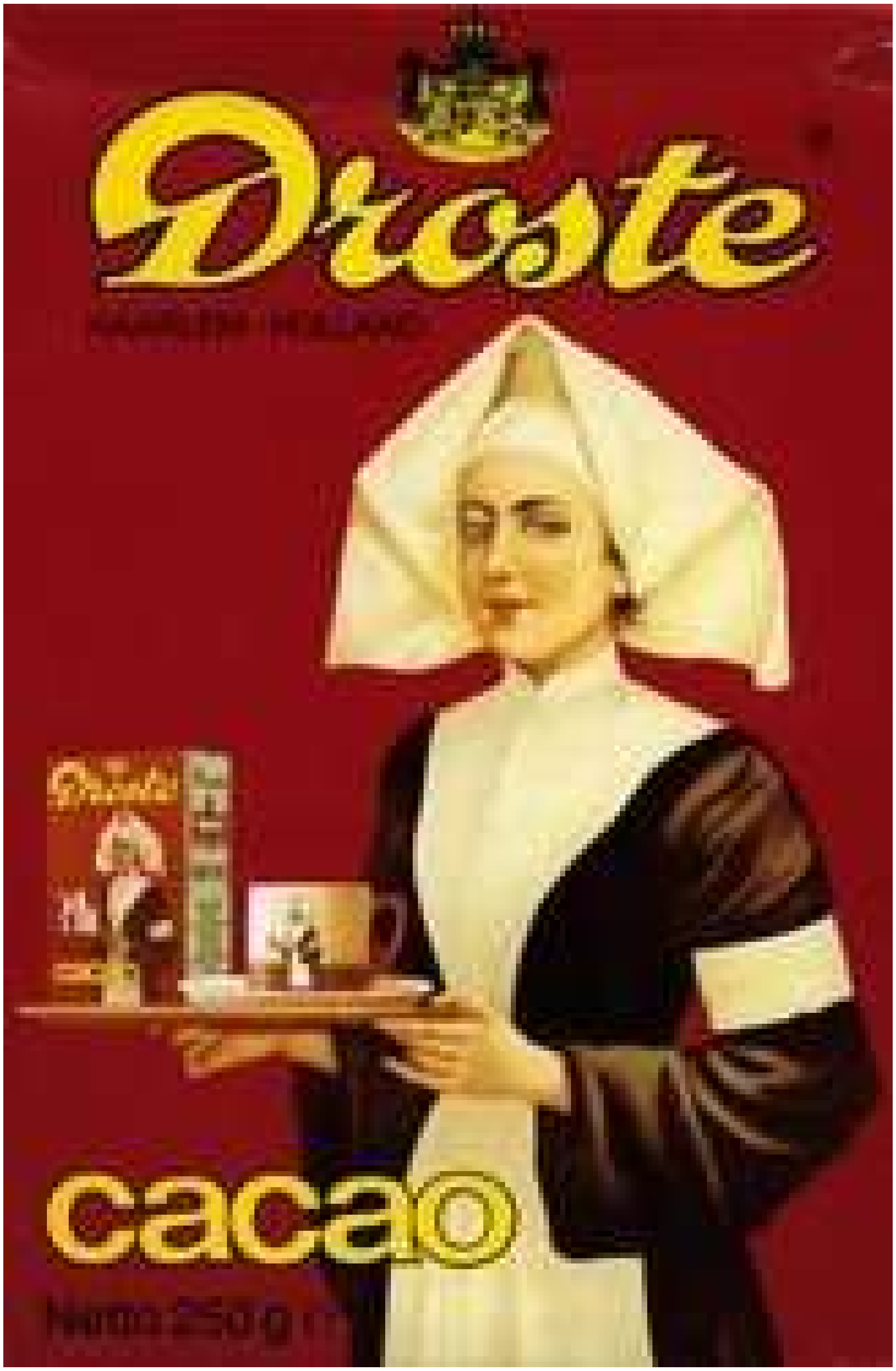
1. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$,

2. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))$,

3. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))))$,

4. $ZR = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2))) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2)) \rightarrow (1 \rightarrow (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))))))$, usw.

Man erhält auf diese Weise also selbst-zirkuläre Mirimanoff-Serien, der Effekt wird entweder auf Grund einer bekannten französischen Schmelzkäsemarke als „La vache qui rit"-Effekt oder auf Grund einer von M.C. Escher portraitierten holländischen Kakaomarke häufiger als „Droste-Effekt" benannt:



Genau den selben grundlegenden Sachverhalt, die Herübernahme von Qualitätsunterschieden aus dem Transfiniten ins Finite, treffen wir nun auch in der von Kronthaler geschaffenen Mathematik der Qualitäten an – sie tritt dort in der Form der unendlich vielen Nachfolger einer Tritozahl auf:

Treten in der A-Mathematik diese Qualitätsunterschiede erst im Unendlichen auf oder anders: treten in der A-Mathematik Qualitäten erst durch Einführung verschiedener Unendlichkeiten (Alephs!) auf, so werden diese in der MdQ ins Endliche hereingeholt; genauso wie durch Tz die Selbstreferentialität ins Endliche transponiert ist, die für die klassische Mathematik transzendent im Unendlichen liegt. (Der formale Ausdruck der ins Transzendente verlagerten Selbst-Referentialität und –Reflexivität eines transzendenten Gottes also : $\aleph_0^{\,n} = \aleph_0$!)[271]

Das Unendliche Quantum aber ist....die Wiederherstellung der QUALITÄT. (57),5,210
In diesem Begriff des UNENDLICHEN ist das QUANTUM wahrhaft zu einem QUALITATIVEN Dasein vollendet; Hegel (57) 5, S. 296

Diese Mächtigkeiten, die Cantorschen Alephs, waren für Cantor etwas Heiliges, gewissermaßen die Stufen, die zum Throne der Unendlichkeit, zum Throne GOTTES emporführen. Kowalewski in (106) S. 110

Eine weitere Eigenart dieser transzendenten Mathematik wird durch die MdQ ins Endliche geholt: die nämlich, das im Unendlichen jede Kardinalzahl UNENDLICH viele "Nachfolger" hat: etwa $\aleph_0, \aleph_0+1, \aleph_0+2, \ldots\ldots \overset{!}{=} \aleph_0$, weswegen ja die Ordinalzahlen in diesem Bereich eingeführt worden sind. In ח hat jedes Aleph genau einen "Nachfolger", es wird damit in gewisser Weise nur $\mathbb{N}$ iteriert!. Dagegen hat auch hier jede Ordinalzahl genau einen Nachfolger.

Während also Kardinalität und Ordinalität diesbezüglich auseinanderfallen, ja diese Begriffe in der A-Mathematik widersprüchlich sind, bilden sie TZ im ENDLICHEN ein Einheit, sie stellen sie stellen zwei Aspekte EINER Tz dar, sind in ihr nur Unter-schiedene.

Man bedenke aber, dass präzise dasselbe auch für die Semiotik nach der Definition von Bense (1979, S. 53) vorgegeben ist, denn die 3 Primzeichen oder Peirce-Zahlen haben ebenfalls unendlich viele Nachfolger:

1^+ = {2, (1→2), (1→(1→2)), (1→(1→(1→2)), (1→(1→(1→(1→2))), ...}

2^+ = {(3, ((1→2)→(1→2→3)), ((1→(1→2))→(1→(1→2)→3)), (1 → ((1 → (1 → 2)) → (1 → (1 → 2) → (1 → 2 → 3)))), (1 → ((1 → (1 → (1→2))) → (1 → (1 → (1→2)) → (1 → (1→2) → (1 → ((1 → (1 → 2)) → (1 → (1 → 2) → (1 → 2 → 3)))),)))), ...}

Bei den Peirce-Zahlen liegt also im Gegensatz zur jenseitigen Transzendenz transfiniter Zahlen eine („finite") diesseitige Transzendenz vor, welche die mathematische Semiotik in grosse Nähe zur qualitativ-mathematischen Theorie der Trito-Zahlen bringt.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Einführung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Leipzig 1994

Maser, Siegfried, Grundlagen der allgemeinen Kommunikationstheorie. 2. Aufl. Berlin 1973

Über die Transfinitheit von Zeichen und von Zeichenklassen

1. Dass Zeichen, d.h. konkrete Zeichen, die arithmetischen Gesetze transfiniter Zahlen erfüllen, wurde bereits in Toth (2011) gezeigt_

a) $\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

b) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

c) $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

d) $\aleph_0 = \aleph_0^n$

e) $\aleph_0^{\aleph 0} = n^{\aleph 0}$

2. Allerdings ist zu präzisieren: Die Menge der Referenzobjekte konkreter Zeichen (Z) ist ein Intervall zwischen 1 Objekt (z.B. „Gott“) und unendlich vielen (z.B. „Moleküle“). Wir wollen das wie folgt notieren:

$|Z| = [1, \infty]$.

Diese Mächtigkeit geht zusammen mit dem in Toth (2006, S. 50 ff.) gelieferten Beweis der Isomorphie der Semiotik mit dem Körper der reellen (und komplexen: Toth 2006, S. 60 ff.) Zahlen. Nehmen wir den Fall des Fehlens eines Referenzobjektes (z.B. „Einhorn“, „Meerjungfrau“, „Drache“) dazu, können wir also schreiben:

$|Z| = \aleph_0$.

3. Was ist nun eine Zeichenklasse? Zeichenklassen sind Menge, in die nicht nur gleiche Zeichen enthalten sind, sondern auch solche, zwischen denen, wie Bense (1983, S. 45) sich ausdrückte, eine „Affinität“ ihrer Referenzobjekte herrscht. Z.B. repräsentiert die Zeichenklasse (3.1 2.1 1.3) sowohl nach Walther (1979, S. 79) eine „typische Fieberkurve“, nach Bense (1981, S. 55) das „Axiomensystem der Aussagenlogik“, nach Bense (1983, S. 30) sowohl „Funktion“ als auch „Urteil“, nach Bense (1983, S. 140) den „Helmholtzschen Vorstellungstyp“, nach Bense (1983, S. 72) die „topologische Algebra“ (was immer Bense hiermit meint), usw. Zeichenklassen zeichnen sich somit durch eine ihre Transfinitheit begründende

Eigenschaft aus, die Bense (1983, S. 45) „Polyrepräsentativität“ nennt. Zeichenklassen haben also nicht wegen der Menge ihrer Referenzobjekte eine unendliche abzählbar unendliche Mächtigkeit, sondern vor allem deshalb, weil sie unendlich viele Zeichen vereinigen, deren Mächtigkeit abzählbar unendlich ist.

4. Genauso wie es in der klassischen Mathematik mehrere Zahlenarten gibt, deren Mächtigkeit $\aleph_0$ beträgt, so gibt es in der Peirceschen Semiotik deren genau zehn:

|3.1 2.1 1.1| = |3.1 2.1 1.2| = |3.1 2.1 1.3| =

|3.1 2.2 1.2| = |3.1 2.2 1.3| = |3.1 2.3 1.3| =

|3.2 2.2 1.2| = |3.2 2.2 1.3| = |3.2 2.3 1.3| =

|3.3 2.3 1.3| = $\aleph_0$

Nun geht aus unseren Einleitungskapitel hervor, dass sich $\aleph_0$ nicht durch die linearen arithmetischen Operationen „vergrössern“ lässt, wohl aber durch Potenzierung: „Während nach unseren Definitionen der Typus $\alpha + \beta$ die Mächtigkeit a + b, der Typus $\alpha\beta$ die Mächtigkeit ab hat (falls α, β die Mächtigkeit a, b haben), wird die Potenz α^β, die wir jetzt definieren, keineswegs die Mächtigkeit a^b haben“ (Hausdorff 1914, S. 117).

Da der Potenzbildung der klassischen Mathematik die Superisation der Peirceschen Semiotik entspricht (vgl. Toth 2007, S. 14 f.), ist also

$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$,

und da wegen der potentiell unendlichen Hierarchie der Superzeichenbildung dieses Vorgehen theoretisch beliebig wiederholt werden kann, bekommen wir

$$\left.\begin{array}{lllll} & & & & \ldots \\ & & & \aleph_0 & \\ & & \aleph_0 & & \\ & \aleph_0 & & & \\ \aleph_0 & & & & \end{array}\right\} = \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots,$$

also eine superativ-abgestufte Hierarchie von semiotischen Unendlichkeiten.

Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Hausdorff, Felix, Grundzüge der Mengenlehre. Berlin 1914

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Allgemeine Zeichengrammatik. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Sind Peirce-Zahlen transfinit? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Peirce-Zahlen%20transfinit.pdf (2011)

Weiteres zur Transfinitheit von Zeichen

1. In der transfiniten Arithmetik gelten bekanntlich (Sierpinski 1958, Bachmann 1955) die folgenden Rechnungsregeln:

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

$\aleph_0 = \aleph_0^n$

$\aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$.

Diese Gesetze gelten, wie in Toth (2011) gezeigt, allesamt auch für Zeichen.

2. Eine strikte Ordnung, wie sie in der finiten Arithmetik etwa die natürlichen Zahlen besitzen

1 < 2 < 3 < ... < n,

gibt es in der transfiniten Arithmetik nur dann, wenn eine Hierarchie von Potenzmengen vorliegt:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \ldots$$

Das für die Semiotik wesentliche Kriterium der Potenzmenge ist, wie bereits in Toth (2006) dargestellt wurde, das Auftreten der leeren Menge bzw. des Nullzeichens, das als Abwesenheit eines Zeichens interpretiert wird:

$\wp(PZ) = \wp(1, 2, 3) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$.

Bilden wir nun eine Hierarchie von

...

$\wp$(PZ)

$\wp$(PZ)

$\wp$(PZ),

so entsteht die strikte Ordnung

$\wp(PZ) < \wp\wp(PZ) < \wp\wp\wp(PZ) < \ldots$

semiotisch offenbar dadurch, dass das Nullzeichen, d.h. die Möglichkeit zur Abwesenheit von Zeichen, auf jeder neuen hierarchischen Stufe gegeben ist. Darauf darf man folgendes schliessen: Während z.B. die Anbringung von meherern anstatt einem Stoppschild an einer Strassenkreuzung an dem einen Zeichen nichts ändert, d.h. dass sich semiotisch keine Summe aus diesen Zeichen bilden lässt, impliziert jede Relation, die ein Nullzeichen enthält, eine NEUE Zeichenrelation, was etwa dem Fall entspricht, dass an der Kreuzung anstatt zweier Stoppschilder neben dem einen Stoppschild ein zweites, aber qualitativ verschiedenes Zeichen (z.B. ein Fussgängerstreifen oder eine Abbiege-Signalisation) angebracht wird. Umgekehrt formuliert: Die Präsenz eines Stoppschildes impliziert nur seine eigene Abwesenheit, bildet also mit dieser zusammen nur eine semiotische Potenzmenge $\wp$(PZ), während die Präsenz eines Stoppschildes und einer Abbiegevorrichtung ZWEI ABWESENHEITEN VON ZEICHEN und damit zwei iterative Potenzmengen $\wp\wp$(PZ) voraus-setzt. Nur der letztere Fall ermöglicht aber eine Addition von Zeichen, denn es ist ja z.B.

$(3.1\ 2.1\ 1.1) + (3.1\ 2.1\ 1.1) = (3.1\ 2.1\ 1.1) \sqcup (3.1\ 2.1\ 1.1) =$

$\max (3.1\ 2.1\ 1.1) + (3.1\ 2.1\ 1.1) = (3.1\ 2.1\ 1.1),$

aber

$(3.1\ 2.1\ 1.2) + (3.1\ 2.1\ 1.3) = (3.1\ 2.1\ 1.2) \sqcup (3.1\ 2.1\ 1.3) =$

$\max (3.1\ 2.1\ 1.2) + (3.1\ 2.1\ 1.3) = (3.1\ 2.1\ 1.3),$

d.h. (3.1 2.1 1.1) ≠ (3.1 2.1 1.3).

Bibliographie

Bachmann, Heinz, Transfinite Zahlen. Springer 1955

Sierpinski, Waclaw, Cardinal and Ordinal Numbers. Warshawa 1959

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Sind Peirce-Zahlen transfinit? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Peirce-Zahlen%20transfinit.pdf (2011)

Abbildungen in verdoppelten semiotischen Zählprozessen

1. Bei den 3 in der triadisch-trichotomischen Semiotik zu unterscheidenden Peirce-Zahlen können folgende Abbildungstypen unterschieden werden:

1.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. (1.1) → (2.1) → (3.1)

σ(a.1) = ((a+1).1)

f: (a.1) → ((a+1).1) = [[(a.), (.a+1)], [(a.1), .1]]

1.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. (1.1) → (1.2) → (1.3)

σ(1.a) = (1.(a+1))

f: (1.a) → (1.(a+1)) = [[(1.a), 1.], [(1.a), (.a+1)]]

1.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: (1.1) → (2.2) → (3.3)

$σ(a.b)_H$ = ((a+1).(b+1))

f: (a.a) → (b.b) = [[a.b], [a.b]]

dgP_N: (3.1) → (2.2) → (1.3)

$σ(a.b)_N$ = ((a±1).(b±1))

f: (c.a) → (b.b) = [[c.b], [a.b] oder

f: (b.b) → (a.c) = [[b.a], [b.c]]

2. Weitere Abbildungstypen ergeben sich aus der auf

ZR = ((a.b), (c.d)) mit a, ..., d ∈ (1, 2, 3} definierten Semiotik (Toth 2011a), denn sie impliziuert ein flächiges Zählschema als Basis einer 2-dimensionalen Semiotik mit zwei dimensional verschiedenen Nachfolgern für jede komponierte Peirce-Zahl ((a.b), (c.d)), und zwar zwei dyadische und zwei dichotomische Nachfolgerelationen (Toth 2011b):

dd((a.b), (c.d)) = ((a.b), (c.d)) → (((a+1).b), (c.d))

dt((a.b), (c.d)) = ((a.b), (c.d)) → ((a.b), (c.(d+1))

dtD((a.b), (c.d)) = ((a.b), (c.d)) → ((a.(b+1)), (c.d))

ddD((a.b), (c.d)) = ((a.b), (c.d)) → ((a.b), ((c+1).d))

Wie die Nachfolgetypen selbst, sind also die Nachfolger (und Vorgänger) hier nicht mehr eindeutig, vgl. z.B.

dd((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.2)) → ((2.2), (3.2)) = [[(1.2), (2.2)], [(3.2), (3.2)]] = [[α, β°], [id2, β°]]

dt((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.2)) → ((1.2), (3.3)) = [[(1.2), (1.2)], [(3.2), (3.3)]] = [[α, β°], [α, id3]]

ddD((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.2)) → ((1.3), (3.2)) = [[(1.2), (1.2)], [(3.2), (3.3)]] = [[α, β°], [α, β°]]

dtD((1.2), (2.2)) = ((1.2), (2.2)) → ((1.2), (3.2)) = [[(1.2), (1.2)], [(2.2), (3.2)][= [[α, id2], [α, β°]]

Kombiniert:

dddt((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.2) → ((2.2), (3.3)) = [[(1.2), (2.2)], [(3.2), (3.3)]] = [[α, β°], [id2, id3]

ddddD((1.2), (2.2)) = ((1.2), (2.2) → ((2.3), (2.2)) = [[(1.2), (2.3)], [(2.2), (2.2)]] = [α, id2], [β°, id2]], usw.

Es gilt also paarweise Ungleicheit der Abbildungen, wobei die Vertauschung der Operatoren nichts am Resultat ändert.

Bibliographie

Toth, Alfred, Konstruktion von Triaden aus Dyadenpaaren ohne vordefinierte Trichotomien. (Dyadisch-trivalente Semiotik 1)In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics,http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Dyadisch-trivalente%20Semiotik%201.pdf (2011a)

Toth, Alfred, Zahlenstrukturen der dyadisch-trivalenten Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2011b)

Die dyadisch-trivalenten diagonalen Peirce-Zahlen

1. In der Peirceschen Semiotik können die Diagonalzahlen einfach wie folgt definiert werden:

dgP_H: (1.1) → (2.2) → (3.3)

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: (3.1) → (2.2) → (1.3)

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Ordnungen: (a.a b.b c.c) mit (a.a) ≪ (b.b) ≪ (c.c) bzw. (a.a) ≫ (b.b) ≫ (c.c)

(a.b c.c b.a) mit (a.b) <> (c.c) <> (b.a)

2. Werfen wir dagegen einen Blick auf die Grosse Matrix (Bense 1975, S. 105), die die Dyaden-Paare der dyadisch-trivalenten Semiotik ZR = ((a.b), (c.d)) enthält:

		M			O			I		
		Qu 1.1	Si 1.2	Le 1.3	Ic 2.1	In 2.2	Sy 2.3	Rh 3.1	Di 3.2	Ar 3.3
M	Qu 1.1	Qu-Qu 1.1 1.1	Qu-Si 1.1 1.2	Qu-Le 1.1 1.3	Qu-Ic 1.1 2.1	Qu-In 1.1 2.2	Qu-Sy 1.1 2.3	Qu-Rh 1.1 3.1	Qu-Di 1.1 3.2	Qu-Ar 1.1 3.3
	Si 1.2	Si-Qu 1.2 1.1	Si-Si 1.2 1.2	Si-Le 1.2 1.3	Si-Ic 1.2 2.1	Si-In 1.2 2.2	Si-Sy 1.2 2.3	Si-Rh 1.2 3.1	Si-Di 1.2 3.2	Si-Ar 1.2 3.3
	Le 1.3	Le-Qu 1.3 1.1	Le-Si 1.3 1.2	Le-Le 1.3 1.3	Le-Ic 1.3 2.1	Le-In 1.3 2.2	Le-Sy 1.3 2.3	Le-Rh 1.3 3.1	Le-Di 1.3 3.2	Le-Ar 1.3 3.3
O	Ic 2.1	Ic-Qu 2.1 1.1	Ic-Si 2.1 1.2	Ic-Le 2.1 1.3	Ic-Ic 2.1 2.1	Ic-In 2.1 2.2	Ic-Sy 2.1 2.3	Ic-Rh 2.1 3.1	Ic-Di 2.1 3.2	Ic-Ar 2.1 3.3
	In 2.2	In-Qu 2.2 1.1	In-Si 2.2 1.2	In-Le 2.2 1.3	In-Ic 2.2 2.1	In-In 2.2 2.2	In-Sy 2.2 2.3	In-Rh 2.2 3.1	In-Di 2.2 3.2	In-Ar 2.2 3.3
	Sy 2.3	Sy-Qu 2.3 1.1	Sy-Si 2.3 1.2	Sy-Le 2.3 1.3	Sy-Ic 2.3 2.1	Sy-In 2.3 2.2	Sy-Sy 2.3 2.3	Sy-Rh 2.3 3.1	Sy-Di 2.3 3.2	Sy-Ar 2.3 3.3
I	Rh 3.1	Rh-Qu 3.1 1.1	Rh-Si 3.1 1.2	Rh-Le 3.1 1.3	Rh-Ic 3.1 2.1	Rh-In 3.1 2.2	Rh-Sy 3.1 2.3	Rh-Rh 3.1 3.1	Rh-Di 3.1 3.2	Rh-Ar 3.1 3.3
	Di 3.2	Di-Qu 3.2 1.1	Di-Si 3.2 1.2	Di-Le 3.2 1.3	Di-Ic 3.2 2.1	Di-In 3.2 2.2	Di-Sy 3.2 2.3	Di-Rh 3.2 3.1	Di-Di 3.2 3.2	Di-Ar 3.2 3.3
	Ar 3.3	Ar-Qu 3.3 1.1	Ar-Si 3.3 1.2	Ar-Le 3.3 1.3	Ar-Ic 3.3 2.1	Ar-In 3.3 2.2	Ar-Sy 3.3 2.3	Ar-Rh 3.3 1.3	Ar-Di 3.3 3.2	Ar-Ar 3.3 3.3

2.1. Hauptdiagonale dyadisch-bivalente Peirce-Zahlen

dgP_H: ((1.1), (1.1)) → ((2.2), (2.2)) → ((3.3), (3.3))

$\sigma(a.b)_H$ = ((a+1).(b+1))

$Ordnung_{dgPH}$: ((a.a), (a.a)), ((b.b), (b.b.)), ((c.c), (c.c)) mit ((a.a), (a.a)) ≪ ((b.b), (b.b.))≪ (c.c) bzw. ((a.a), (a.a)) ≫ ((b.b), (b.b.)) ≫ (c.c).

2.2. Nebendiagonale dyadisch-bivalente Peirce-Zahlen

dgP_N: ((3.3), (1.1)), ((3.2), (1.2)), ((3.1, 1.3)), ((2.3), (2.1)), ((2.2), (2.2)),
((2.1), (2.3)), ((1.3), (3.1)), ((1.2), (3.2)), ((1.1), (3.3)).

$\sigma(a.b)_N$ = ((a.a), (b.b)), (((a.(a-1)), (b.(b+1))), (((a.(a-2)), (b.(b+2))) … (((a-1).(a-1))) = ((c.c), (c.c)), (((c.(c-1)), (c.(c+1))), (((c-1).(c+1)), ((c+1).(c-1))) … ((b.b), (a.a)).

$Ordnung_{dgPN}$: (((c.c), (a.a)) ... ((b.b), (b.b)) ... ((a.a), (c.c))) mit ((c.c), (a.a)) <> ((b.b), (b.b)) <> ((a.a), (c.c)).

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Zahlenstruktur der dyadisch-trivalenten Semiotik

1. Bekanntlich (Toth 2011) basiert die dyadisch-trivalente Semiotik auf der Zeichenrelation

ZR = ((a.b), (c.d)) mit a, ..., d ∈ {1, 2, 3},

wobei die zweite Partialdyade (c.d) die erste (a.b) determiniert (vgl. Bense 1975, S. 100 ff.). Während also in der auf einfachen und nicht verdoppelten Dyaden beruhenden Peirceschen Semiotik in jedem Subzeichen (a.b) das (a.) als triadisches und das (.b) als trichotomische Peirce-Zahl (Primzeichen) fungiert, repetiert sich diese Besonderheit zweier Peirce-Zahlen in der dyadisch-trivalenten Semiotik auf der Ebene der Subzeichen, d.h. (a.b) ist als „dyadische Peirce-Zahl höherer Ebene" und (c.d) als „dichtomische Peirce-Zahl auf niedrigerer Ebene aufzufassen.

2. Wir haben demnach ein flächiges Zählschena als Basis einer 2-dimensionalen Semiotik mit zwei dimensional verschiedenen Nachfolgern für jede komponierte Peirce-Zahl ((a.b), (c.d)), und zwar eine dyadische (dd) und eine dichotomische (dt) Nachfolgerelation:

dd((a.b), (c.d)) = (((a+1).b), (c.d))

dt((a.b), (c.d)) = ((a.b), (c.(d+1))

Z.B. ist also dd((1.2), (3.2)) = ((2.2), (3.2)) und dt((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.3)). Dies führt zur folgenden Zahlenstruktur:

$$\begin{array}{lll}
((3.1), (1.1)) & & \\
\quad\uparrow & & \\
((2.1), (1.1)) & & \\
\quad\uparrow & & \\
((1.1), (1.1)) \rightarrow & ((1.1), (1.2)) \rightarrow & ((1.1), (1.3))
\end{array}$$

3. Allerdings müssen wir auch von

((a.b), (c.d)) nach ((a.(b+1)), (c.d))

sowie von

((a.b), (c.d)) nach ((a.b), ((c+1).d))

zählen können, d.h. innerhalb der dichtotomischen Dyade und innerhalb der dyadischen Dichotomie. Wenn wir die entsprechendne Operatoren dtD und ddD nennen, haben wir z.B.

dtD((1.2), (3.2)) = ((1.3), (3.2))

ddD((1.2), (3.2)) = ((1.2), (3.3)).

Dies führt nun zu einem zweiten 2-dimensionalen Zählschema:

((1.1) (3.1))

↑

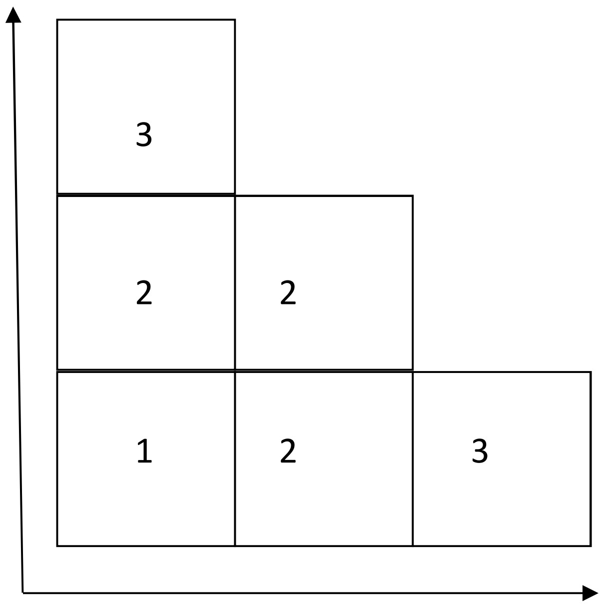
((1.1), (2.1))

↑

((1.1), (1.1)) → ((1.2), (1.1)) → ((1.3), (1.1)).

Man kann überdies beide 2-dimensionalen Zählschemata zusammenhängen, würde dazu im Prinzip aber 4 Dimensionen brauchen, um nicht dt und dtD sowie dd und ddD in jedem Zeitpunkt an gleicher Stelle ausführen zu müssen.

In 2 Dimensionen könnte man diesen verdoppelten 2-dimensionalen Zahlenprozess wie folgt darstellen, wenn man von den monadischen Primzeichen anstatt von den Dyaden ausgeht:



Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Die Konstruktion von Triaden aus Dyadenpaaren ohne vordefinierte Trichotomien. (Dyadisch-trivalente Semiotik 1)In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Zur Theorie der Relationalzahlen I

1. In Toth (2011) hatten wir gezeigt, dass die Zahl zwar ein Zeichen (und kein Objekt) ist, dass es sich aber auf präsemiotischer und nicht auf semiotischer Stufe befindet und dass die Repräsentation von Quantität ohne Qualität daher ein phylogenetisch älteres Stadium darstellt. Damit ist die abstrakte präsemiotische Zahlenrelation

ZR(Za) = (3.a 2.b 1.c 0.d) mit a, ..., d ∈ {1, 2, 3}

mit ihrer dreifachen Unterscheidung

(0.1) ← Kardinalzahl, d.h. Repräsentation als Mächtigkeit

(0.2) ← Ordinalzahl, d.h. Repräsentation als Nachfolge

(0.3) ← Relationalzahl, d.h. Repräsentation als Konnex

tieferliegend als die Peircesche Zeichenrelation ohne eingebettetes relationales Objekt (O°) und befindet sich auf der Ebene der „Nullheit“ (Bense 1975, S. 65 f.) im „präsemiotischen Raum“ (Toth 2007), der zwischen dem „ontologischen Raum“ unterhalb und dem „semiotischen Raum“ oberhalb (Bense 1975, S. 65 f.) angesiedelt ist.

2. Nachdem Kardinal- und Ordinalzahlen seit langer Zeit sowohl in der klassischen (finiten und transfiniten) Mathematik als auch in der Semiotik besonders von Bense und mir ausführlich untersucht wurden und noch werden, sollen in dem vorliegenden Beitrag erstmals die von Bense entdeckten Relationalzahlen untersucht werden. Im folgenden werden wir uns der Struktur des Körpers der natürlichen Zahlen widmen.

2.1. Reihung und Bündelung

Betrachten wir die natürlichen Zahlen:

ℕ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ..., 19, 20, 30, 40, ..., 90, 100, 1000 ...

In ℕ gilt für jede Zahl x ≥ 1:

σx = x+1,

und dieser Nachfolgeoperator garantiert das unendliche Fortschreiten auf der Zahlengerade jeweils um eine natürliche Zahl, denn es gelten die 5 Peano-Axiome (Oberschelp 1976, S. 16)_

P 1 $0 \in \mathbb{N}.$

P 2 $N(k) \in \mathbb{N}.$

P 3 $N(k) \neq 0.$

P 4 $k \neq l \Rightarrow N(k) \neq N(l).$

P 5 $0 \in A \wedge \forall k (k \in A \Rightarrow N(k) \in A) \Rightarrow \forall k (k \in A).$

Das ist also, was wir die **Reihung** der natürlichen Zahlen nennen. Wenn wir jedoch mit ihnen rechnen, bündeln wir sie in Zehner, denn benutzen zu ihrer Darstellung der 10er-System:

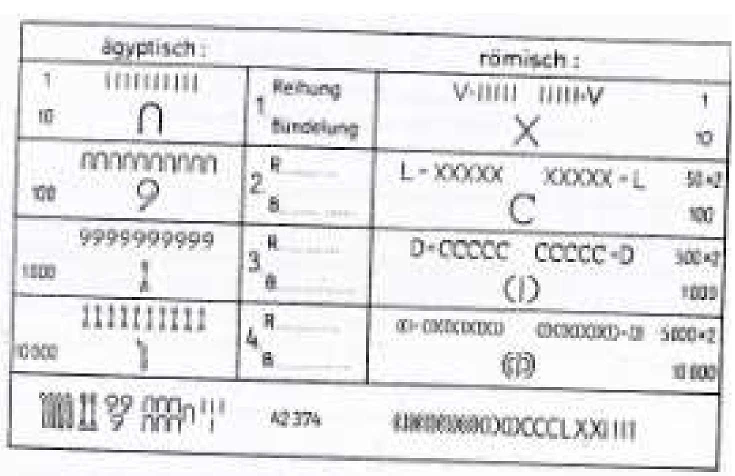
$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1´000$, usw.

Menninger (1958, S. 53) bringt als alternatives Beispiel für **Bündelung** die Bilderzahlschrift der Altägypter:



Wie Menninger feststellte, sind „alle Massordnungen Bündelungen in aufsteigender Ordnung“ (1958, S. 52)

60 Sek. = 1 Min.

60 Min. =1 Std.

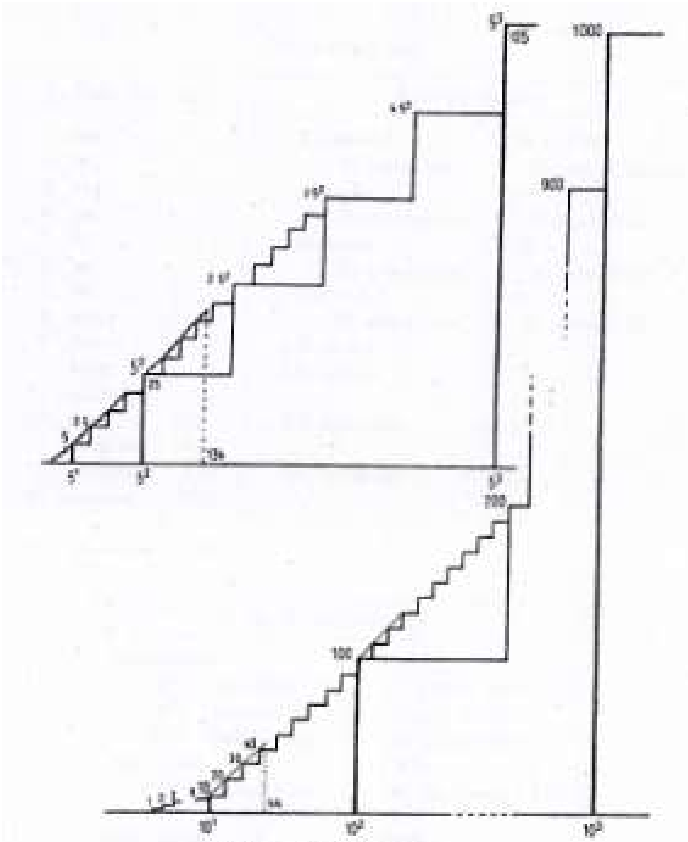
24 Std. = 1 Tg.

30 Tg. = 1 Mon.

12 Mon. = 1 J.

2.2. Stufung

Menninger spricht von einer „Zähltreppe“: „Während man beim Zählen das Gefühl hat, eine Treppe hinaufzusteigen: 1, 2, 3, ..., 9, 10 – so, hier ist ein Absatz (...). Dann geht es wieder weiter: 11, 12, ..., 19, 20, wieder ein Absatz. Und so klettert man immer höher den Turm hinauf (...). Die Zählreihe ist gestuft: Das erreicht sie durch die Benennung der Reihenglieder; diese stehen nicht mehr namenlos und gleichwertig nebeneinander, sondern bilden die Stufen einer Treppe: sieben ist ´höher´ als drei“ (1958, S. 56 f.). Vgl. dazu die folgende Illustration aus Menninger (1958, S. 69):



Die 5- und die 10-Stufung
Die Rangschwellen 5^1, 5^2, 5^3 und 10^1, 10^2, 10^3 stehen auf dem ‚Boden'. Auf jeder Stufe laufen immer die des vorhergehenden Ranges ab. Dargestellt ist in beiden die Zahl 44:
$1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 134$ $4 \cdot 10 + 4 = 44$.

Zur **Stufung** der Zahlzeichen sind hier zwei Besonderheiten zu erwähnen:

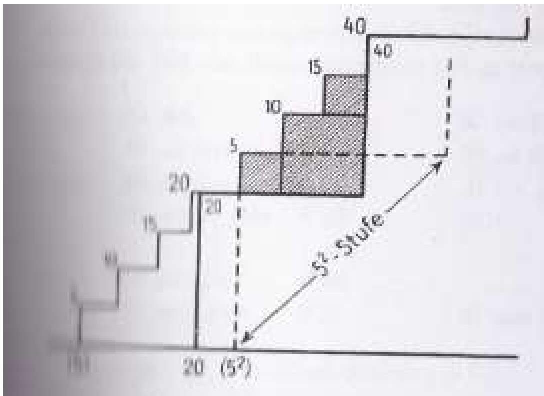
1. Die regressive Zählweise vor einer Stufung, vgl.

lat. un-de-viginti (1 aus 20 = 19), duodevigimti (2 aus 20 = 18)

griech. δυοῖν δέοντες ἐξέκοντα „an zweien ermangelnd 60 = 58“

2. Die von Menninger (1958, S. 94) so genannte „Verzifferung“, d.h. die Verwendung etymologisch nicht zusammenhängender Bezeichnungen für Zehnerpotenzen, z.B. türk. 2/20: iki/yirmi, 3/30: üç/otuz; 4/40: dört/kırk; 5/50: beş/elli.

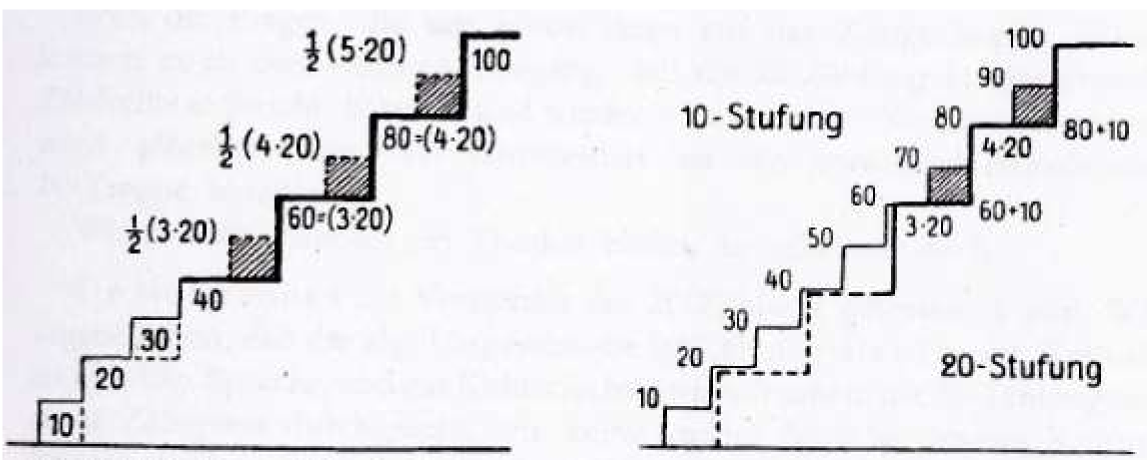
Das folgende Bild aus Menninger (1958, S. 74) gibt die altmexikanische 20-Stufung:



Altmexikanische 20-Stufung

[illegible] 5-Treppe bis 20, die sich von dort einfach nur [illegible] 20-Stufen hineinstellt. Daß sie keine 5-Stu-[illegible] zeigt die gestrichelte Treppe, die als 2. Rang-[illegible] ausgezeichnet sein müßte. An ihrer Stelle herrscht eindeutig die 20-Stufung.

und das nachstehende den Vergleich der Halb-Stufen der dänischen 20-er Treppe mit dem Druchbruch der 20-Treppe in der französischen 10-Stufung:



Die Halb-Stufen auf der dänischen 20-Treppe

Durchbruch der 20-Treppe in der französischen 10-Stufung

Reihung, Bündelung und Stufung erweisen sich somit als semiotische Mittel, um die natürlichen Zahlen als präsemiotische Relationen in Teilkonnexe zu unterteilen. Sie betreffen damit natürlich die Relationalzahlen.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Menninger, Karl, Zahlwort und Ziffer. Göttingen 1958

Oberschelp, Arnold, Aufbau des Zahlensystems. 3. Aufl. Göttingen 1976

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Menningers “haftende Zählreihe“. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Zur Theorie der Relationalzahlen II

1. In dieser Fortsetzung (vgl. Toth 2011) untersuchen wir Wechsel und Strukturen trichotomischer Peirce-Zahlen innerhalb von n-adischen Relationen, beginnend mit einer Neuinterpretation 3-adischer Strukturen nach Toth (2007), aus dessen letztem Kapitel auch die einschlägigen Passagen reproduziert sind.

2. Triadisch-trichotomische Semiotik

Die 10 triadischen Zkln×Rthn sind:

1	3.1	2.1	1.1	×	$\underline{1.1}$	$\underline{1.2}$	$\underline{1.3}$	1^3
2	3.1	2.1	1.2	×	2.1	$\underline{1.2}$	$\underline{1.3}$	$2^1 1^2$
3	3.1	2.1	1.3	×	3.1	$\underline{1.2}$	$\underline{1.3}$	$3^1 1^2$
4	3.1	2.2	1.2	×	2.1	2.2	$\underline{1.3}$	$2^2 1^1$
5	**3.1**	**2.2**	**1.3**	**×**	**3.1**	**2.2**	$\underline{\mathbf{1.3}}$	$\mathbf{3^1 2^1 1^1}$
6	3.1	2.3	1.3	×	3.1	3.2	1.3	$3^2 1^1$
7	3.2	2.2	1.2	×	$\underline{2.1}$	$\underline{2.2}$	$\underline{2.3}$	2^3
8	3.2	2.2	1.3	×	3.1	$\underline{2.2}$	$\underline{2.3}$	$3^1 2^2$
9	3.2	2.3	1.3	×	3.1	3.2	2.3	$3^2 2^1$
10	3.3	2.3	1.3	×	$\underline{3.1}$	$\underline{3.2}$	$\underline{3.3}$	3^3

1. Thematisationsrichtung:

   $X^m Y^n$ mit $X \in \{1, 2, 3\}$, wobei $X = Y$ erlaubt und $m, n \in \{1, 2\}$ mit $X^m \rightarrow Y^n$, falls $m > n$ bzw. $X^m \leftarrow Y^n$, falls $m < n$. (Der Fall $m = n$ tritt nicht auf.)

2. Mehrdeutige Thematisationen und Thematisationsrichtungen gibt es bei den HZkln×HRthn 1, 7 und 10. Bei 1 und 10 könnte man aus strukturellen Gründen Links- bzw. Rechtsthematisation stipulieren; dies ist jedoch bei 7 nicht möglich. Also gibt es keine einheitlichen Thematisationsrichtungen bei den homogenen Thematisationen, d.h. bei den HZkln×HRthn.

3. Triadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten:

5.	3.1	2.2	1.3	×	$\underline{3.1}$	$\underline{2.2}$	1.3	$3^1 2^1 \rightarrow 1^1$
					$\underline{3.1}$	2.2	$\underline{1.3}$	$3^1 \rightarrow 2^1 \leftarrow 1^1$
					3.1	$\underline{2.2}$	$\underline{1.3}$	$3^1 \leftarrow 2^1 1^1$

3. Tetradisch-tetratomische Semiotik

1	3.0	2.0	1.0	0.0	×	0.0	0.1	0.2	0.3	0^{4}
2	3.0	2.0	1.0	0.1	×	1.0	0.1	0.2	0.3	$1^{1}0^{3}$
3	3.0	2.0	1.0	0.2	×	2.0	0.1	0.2	0.3	$2^{1}0^{3}$
4	3.0	2.0	1.0	0.3	×	3.0	0.1	0.2	0.3	$3^{1}0^{3}$
5	3.0	2.0	1.1	0.1	×	1.0	1.1	0.2	0.3	$1^{2}0^{2}$
6	3.0	2.0	1.1	0.2	×	2.0	1.1	0.2	0.3	$2^{1}1^{1}0^{2}$
7	3.0	2.0	1.1	0.3	×	3.0	1.1	0.2	0.3	$3^{1}1^{1}0^{2}$
8	3.0	2.0	1.2	0.2	×	2.0	2.1	0.2	0.3	$2^{2}0^{2}$
9	3.0	2.0	1.2	0.3	×	3.0	2.1	0.2	0.3	$3^{1}2^{1}0^{2}$
10	3.0	2.0	1.3	0.3	×	3.0	3.1	0.2	0.3	$3^{2}0^{2}$
11	3.0	2.1	1.1	0.1	×	1.0	1.1	1.2	0.3	$1^{3}0^{1}$
12	3.0	2.1	1.1	0.2	×	2.0	1.1	1.2	0.3	$2^{1}1^{2}0^{1}$
13	3.0	2.1	1.1	0.3	×	3.0	1.1	1.2	0.3	$3^{1}1^{2}0^{1}$
14	3.0	2.1	1.2	0.2	×	2.0	2.1	1.2	0.3	$2^{2}1^{1}0^{1}$
15	**3.0**	**2.1**	**1.2**	**0.3**	**×**	**3.0**	**2.1**	**1.2**	**0.3**	$\mathbf{3^{1}2^{1}1^{1}0^{1}}$
16	3.0	2.1	1.3	0.3	×	3.0	3.1	1.2	0.3	$3^{2}1^{1}0^{1}$
17	3.0	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	0.3	$2^{3}0^{1}$
18	3.0	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	0.3	$3^{1}2^{2}0^{1}$
19	3.0	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	0.3	$3^{2}2^{1}0^{1}$
20	3.0	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	0.3	$3^{3}0^{1}$
21	3.1	2.1	1.1	0.1	×	1.0	1.1	1.2	1.3	1^{4}
22	3.1	2.1	1.1	0.2	×	2.0	1.1	1.2	1.3	$2^{1}1^{3}$
23	3.1	2.1	1.1	0.3	×	3.0	1.1	1.2	1.3	$3^{1}1^{3}$
24	3.1	2.1	1.2	0.2	×	2.0	2.1	1.2	1.3	$2^{2}1^{2}$
25	3.1	2.1	1.2	0.3	×	3.0	2.1	1.2	1.3	$3^{1}2^{1}1^{2}$
26	3.1	2.1	1.3	0.3	×	3.0	3.1	1.2	1.3	$3^{2}1^{2}$
27	3.1	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	1.3	$2^{3}1^{1}$
28	3.1	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	1.3	$3^{1}2^{2}1^{1}$
29	3.1	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	1.3	$3^{2}2^{1}1^{1}$
30	3.1	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	1.3	$3^{3}1^{1}$
31	3.2	2.2	1.2	0.2	×	2.0	2.1	2.2	2.3	2^{4}
32	3.2	2.2	1.2	0.3	×	3.0	2.1	2.2	2.3	$3^{1}2^{3}$
33	3.2	2.2	1.3	0.3	×	3.0	3.1	2.2	2.3	$3^{2}2^{2}$
34	3.2	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	2.3	$3^{3}2^{1}$
35	3.3	2.3	1.3	0.3	×	3.0	3.1	3.2	3.3	3^{4}

Für die tetradische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Bei den triadischen Thematisationen treten erstmals solche vom Typ $X^m Y^m \leftarrow Z^{2m}$ bzw $Z^{2m} \rightarrow X^m Y^m$ auf. Hier wurde die Thematisationsrichtung gemäß der größten Frequenz einer einzelnen Kategorie festgelegt.

2. Während die Sandwiches der dyadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftrightarrow Y^m$ sind, sind diejenigen der triadischen Thematisationen vom Typ $X^m \leftarrow Y^{2m} \rightarrow Z^m$. Da man sich auch eine (in der pentadischen Semiotik tatsächlich auftretende) Struktur $X^m \rightarrow Y^{2m} \leftarrow Z^m$ denken kann, nannten wir die erste zentrifugal und nennen wir die zweite zentripetal.

3. Tetradische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten. Rein theoretisch sind folgende 10 Thematisationstypen möglich:

15 3.0 2.1 1.2 0.3	×	$\underline{3.0\ 2.1\ 1.2}\ 0.3$	$3^1 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$
		$\underline{3.0\ 2.1}\ 1.2\ 0.3$	$3^1 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$
		$\underline{3.0}\ 2.1\ 1.2\ 0.3$	$3^1 \rightarrow 2^1 1^1 0^1$
		$3.0\ \underline{2.1\ 1.2\ 0.3}$	$3^1 \leftarrow 2^1 1^1 0^1$
		$3.0\ 2.1\ \underline{1.2\ 0.3}$	$3^1 2^1 \leftarrow 1^1 0^1$
		$3.0\ 2.1\ 1.2\ \underline{0.3}$	$3^1 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$
		$\underline{3.0}\ 2.1\ 1.2\ \underline{0.3}$	$3^1 \rightarrow 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$
		$3.0\ \underline{2.1\ 1.2}\ 0.3$	$3^1 \leftarrow 2^1 1^1 \rightarrow 0^1$
		$3.0\ \underline{2.1}\ 1.2\ 0.3$	$3^1 \leftarrow 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$

$$3.0\ 2.1\ \underline{1.2}\ 0.3 \quad 3^1 2^1 \leftarrow 1^1 \rightarrow 0^1$$

Man könnte die Regel aufstellen: $X^m Y^m Z^m \rightarrow A^m$ wegen $3m > m$. Dann würden die Typen $3^1 \rightarrow 2^1 1^1 0^1$ und $3^1 2^1 1^1 \leftarrow 0^1$ als regelwidrig entfallen. Unklar bleiben dann aber immer noch $3^1 2^1 \rightarrow 1^1 0^1$ und $3^1 2^1 \leftarrow 1^1 0^1$. Von den vier Sandwiches sind die beiden letzten rechts- bzw. linksmehrfach.

4. Pentadisch-pentatomische und hexadisch-hexatomische Semiotik

3. Strukturen der pentadischen, hexadischen und n-adischen Semiotik

Wieviel Raum die Darstellung höherwertiger Semiotiken für n > 4 einnehmen würde, läßt sich daran ermessen, daß schon die pentadische Semiotik 126 und die hexadische 462 Zeichenklassen zu ihrer Darstellung benötigen. Wenn man sich nun die Zahlen 10, 35, 126, 462 anschaut, die den Anzahlen der Zeichenklassen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotik entsprechen, so fällt auf, daß es sich hier um 2-, 3-, 4- und 5-dimensionale Zahlen handelt, die eine Teilmenge der figurativen Zahlen bilden, worunter man bekanntlich natürliche Zahlen versteht, die "Anzahlen von Punkten darstellen, welche gleichmäßig auf den Ecken, den Seiten und im Innern von regelmäßigen ebenen oder räumlichen Figuren verteilt sind" (Flachsmeyer 1969: 74). Figurative Zahlen entstehen "durch fortschreitendes Summieren der Glieder einer arithmetischen Reihe" (Bischoff 1997: 179). Mehrdimensionale Zahlen lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks darstellen:

1	1	1	1	1	1	1	1	.1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	.9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Während die erste Zeile und Spalte aus Einserfolgen besteht, finden wir in der zweiten Zeile und Spalte die Folge der natürlichen Zahlen, also die eindimensionalen Zahlen. In der dritten Zeile und Spalte stehen die zweidimensionalen Dreieckszahlen, in der vierten die dreidimensionalen Tetraederzahlen, in der fünften die vierdimensionalen Zahlen, in der sechsten die fünfdimensionalen Zahlen, usw. Diese lassen sich nicht nur aus dem Pascalschen Dreieck ablesen, sondern auch durch einfache Formeln berechnen:

Dreieckszahlen:	1, 3, 6, **10**, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … ½ n (n + 1)
Tetraederzahlen:	1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, 165, 220, … 1/6 n (n + 1) (n + 2)
4-dimensionale Zahlen:	1, 5, 15, 35, 70, **126**, 210, 330, 495, 715, … 1/24 n (n + 1) (n + 2) (n + 3)
5-dimensionale Zahlen:	1, 6, 21, 56, 126, 252, **462**, 792, 1287, 2002, … 1/120 n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4)

Die in der obigen Darstellung fett markierten Zahlen sind also zugleich die Anzahlen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotiken. Damit korrespondieren also zweidimensionale Zahlen mit der triadischen Semiotik, dreidimensionale mit der tetradischen Semiotik …, allgemein: n-dimensionale Zahlen mit der n+1-dimensionalen Semiotik, und zwar gibt offenbar die n+2-te n-dimensionale Zahl einer n+1-adischen Semiotik die Anzahl derer Zkl×Rth an.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen den mehrdimensionalen Zahlen und den Anzahlen der Trichotomien eines vollständigen triadischen, tetradischen, pentadischen, hexadischen, … n-adischen Dualsystems. Wie wir gesehen haben, findet in der triadischen Semiotik Trichotomienwechsel zwischen der 6. und der 7. sowie zwischen der 9. und 10. Zkl×Rth statt. Die 10 triadischen Zkln×Rthn unterteilen sich also in 3 Trichotomien, und zwar in eine mit 6 Zkln×Rth, in eine mit 3 Zkln×Rthn und in eine mit 1 Zkl×Rth. In der tetradischen Semiotik findet Trichotomienwechsel zwischen der 20. und der 21., zwischen der 30. und der 31. und zwischen der 34. und der 35. Zkl×Rth statt. Die 35 tetradischen Zkl×Rth unterteilen sich somit in 4 Trichotomien, und zwar in eine mit 20 Zkl×Rth, in eine mit 10, in eine mit 4 und in eine mit 1 Zkl×Rth. Stellen wir diese Anzahlen mit den entsprechenden Anzahlen in der pentadischen und hexadischen Semiotik zusammen:

Triadische Semiotik:	3 Trichotomien; Anzahlen: 6, **3**, 1
Tetradische Semiotik:	4 Trichotomien; Anzahlen: 20, 10, **4**, 1

Pentadische Semiotik: 5 Trichotomien; Anzahlen: 70, 35, 15, **5**, 1

Hexadische Semiotik: 6 Trichotomien; Anzahlen: 252, 126, 56, 21, **6**, 1

Wie man leicht erkennt, sind die Anzahlen der Trichotomien der ersten n für n ≤ 6 wieder die ersten n-dimensionalen Zahlen für n ≤ 5, nur in umgekehrter Reihenfolge. Offenbar gibt also die jeweils zweite n-dimensionale Zahl die Anzahl der Trichotomien einer n+1-adischen Semiotik an. Damit kann man nun auch die Orte der Trichotomienwechsel auf einfache Weise bestimmen: Man subtrahiert von der n-ten Zahl nacheinander zuerst die erste Zahl, dann die Summe aus der ersten und zweiten Zahl, dann diejenige aus der ersten, zweiten und dritten Zahl …, nicht aber die Summe der ersten und der n–1ten Zahl, da diese Differenz 0 beträgt und trivialerweise der Anfang eines semiotischen Dualsystems kennzeichnet.

Ein Beispiel soll das angegebene Verfahren illustrieren: Hierzu kehren wir zu unserer obigen Tabelle der mehrdimensionalen Zahlen zurück. Wir überprüfen die Orte der Trichotomienwechsel der tetradischen Semiotik. Die Anzahl der Zkln×Rthn der tetradischen Semiotik beträgt 35. Sei also 35 die n-te Zahl. Dann sind die ersten n–1 Zahlen: 1, 4, 10, 20. Wir subtrahieren also zuerst 35 – 1 = 34, dann 35 – (1 + 4) = 30 und schließlich 35 – (1 + 4 + 10) = 20 und erhalten so die Nummern der jeweils letzten Zkln×Rthn vor einem Trichotomienwechsel. Durch einfaches Addieren von 1 erhält man die jeweils ersten Zkln×Rthn nach dem Trichotomienwechsel. Durch Umkehrung der so gewonnenen

Zahlenpaare bekommt man die vollständige Anzahl der Trichotomienwechsel der tetradischen Semiotik: 20/21, 30/31, 34/35. Ein Kontrollblick auf die Übersicht der Zkln×Rthn der tetradischen Semiotik bestätigt, daß das erhaltene Resultat korrekt ist.

Nach diesem Exkurs zum Zusammenhang von n-dimensionalen Zahlen, n-adischen Semiotiken, der Anzahl ihrer Zkln×Rthn, der Anzahl ihrer Trichotomien und den Orten ihrer Trichotomienwechsel wollen wir nun noch die strukturellen Besonderheiten nennen, die auftreten, wenn man von der tetradischen zur pentadischen und hexadischen Semiotik fortschreitet.

Für die pentadische Semiotik können wir folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Neben dyadischen und triadischen treten erwartungsgemäß nun tetradische Thematisationstypen auf.

2. Bei den triadischen Thematisationen tauchen Typen der Form $X^m Y^m \leftarrow Z^n$ bzw. $Z^n \rightarrow X^m Y^m$ mit $n \leq 3$ auf. An Sandwich-Thematisationen erscheinen nun zentrifugale der Form $X^m \leftarrow Y^n \rightarrow Z^m$ neben zentripetalen der Form $X^m \rightarrow Y^n \leftarrow Z^m$.

3. Bei den tetradischen Thematisationen treten Typen der Form $X^m Y^m Z^m \leftarrow A^n$ bzw. $A^n \rightarrow X^m Y^m Z^m$ auf. Als neuer Typ von Sandwich-Thematisationen erscheinen linksmehrfache Sandwiches der Form $X^m Y^m \leftarrow A^n \rightarrow Z^m$ sowie rechtsmehrfache der Form $X^m \leftarrow A^n \rightarrow Y^m Z^m$, die bereits in der tetradischen Realität der Tetratomischen Tetraden erstmals auftauchten.

4. Pentadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

5. Als wichtigstes Resultat ergibt sich jedoch, daß die zu erwartenden Pentatomischen Pentaden (dyadischer, triadischer und tetradischer Thematisation) nicht konstruierbar sind, da die Regel zur Bildung Trichotomischer Triaden, die noch bei den Tetratomischen Tetraden Anwendung fand, hier offenbar nicht mehr anwendbar ist, da von den zahlreichen neu auftretenden Sandwiches nicht klar ist, ob und wie sie in die Pentatomischen Pentaden integriert sind.

Für die hexadische Semiotik können wir schließlich folgende Ergebnisse und Probleme festhalten:

1. Erwartungsgemäß treten dyadischen, triadischen und tetradischen nun auch pentadische Thematisationstypen auf.

2. Bei den dyadischen Thematisationen treten Sandwiches unklarer Thematisationsrichtung der Form $X^m \leftrightarrow Y^m$ auf.

3. Bei den triadischen Thematisationen sind die Thematisationsrichtungen im Grunde unklar. Versuchsweise könnten drei Gruppen gebildet werden: 1. Solche, deren linke Kategorie die Gestalt X^1 hat. 2. Solche, deren rechte Kategorie die Gestalt X^1 hat. 3. Solche, deren mittlere Kategorie die Gestalt X^1 hat, die aber weder zu 1. noch zu 2. gehören (Sandwiches). Ausdifferenzierungen und andere Gruppierungen sind aber möglich. Die triadischen Sandwiches der Form $X^m \leftrightarrow Y^n \leftrightarrow Z^m$ weisen, wie schon die dyadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

4. Für die tetradischen Thematisationen gilt das zu den triadischen Gesagte. Auch die tetradischen Sandwiches der Form $A^m \leftrightarrow X^n Y^n \leftrightarrow B^m$ weisen, wie bereits die dyadischen und die triadischen, unklare Thematisationsrichtung auf.

5. Für die pentadischen Thematisationen gilt das zu den tetradischen Gesagte.

6. Hexadische Realität gibt es nur bei der (eigenrealen) Determinanten.

7. Für die zu erwartenenden Hexatomischen Hexaden gilt das zu den Pentatomischen Pentaden Gesagte, nur daß hier noch mehr Verwirrung herrscht.

5. Trichotomienwechsel und Strukturen

Selbstverständlich können höherwertige Semiotiken herangezogen werden; theoretisch könnte man eine infinite Semiotik postulieren. Auch wenn Peirce hat, dass sich n-adische Relationen mit n > 3 formal auf Relationen mit n = 3 reduzieren lassen, so ist dies in qualitativer Hinsicht nicht möglich, so dass sich der Ausblick von n = 4, n = 5 und n = 6 (ganz zu schweigen von noch größerem n) lohnt, da polyadische Semiotiken Strukturen aufweisen, die in der triadischen Semiotik gar nicht oder erst ansatzweise auftreten.

So konnten wir etwa feststellen, dass n-adische Semiotiken über n–2 n-tomische n-aden verfügen, so dass also die Trichtomischen Triaden der triadischen Semiotik nur einen Spezialfall für n = 3 mit 3 – 2 = 1 darstellen.

Die Betrachtung polyadischer Semiotiken führte uns ferner auf ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der Anzahl Zkln×Rthn sowie der Anzahl von Trichotomien und der Orte der Trichotomienwechsel einer beliebigen n-adischen Semiotik.

Bemerkenswert ist ferner die Feststellung, daß es in n-adischen Semiotiken mit n ≥ 5 nicht mehr eindeutig möglich ist, n-tomische n-aden zu konstruieren. Man mag sich hier an die Gödelschen Unvollständigkeitssätze höherer Prädikatenkalküle erinnern, in denen bekanntlich die Widerspruchsfreiheit eines formalisierten Systems nicht innerhalb des Systems selbst nachgewiesen werden kann. Während aber die Widerspruchsfreiheit eines prädikatenlogischen Systems der Stufe n in einem System der Stufe n+1 nachweisbar ist, tragen semiotische Systeme der Stufe n+1 nichts dazu bei, n-tomische n-aden zu konstruieren! Immerhin können wir die Parallele soweit treiben, daß die folgende Feststellung zur Prädikatenlogik der 1. Stufe sich auch auf die triadische Semiotik übertragen läßt, dasss nämlich "kein logisches System, welches die Logik der 1. Stufe erweitert, auch deren Vorzüge besitzen kann"(Ebbinghaus, Flum und Thomas 1996, S. vi) – und dies mag der tiefste Grund dafür sein, daß man sich bisher auf die triadische Semiotik beschränkt hatte.

Bibliographie

Ebbinghaus, Heinz Dieter et al., Mathematische Logik. Heidelberg 1996

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Zur Theorie der Realtionalzahlen I. In: Electronic Journal for Mathematical Semiocs, 2001

Zur Theorie der Relationalzahlen III

1. In diesem dritten Teil unserer Untersuchungen zu den Relationalzahlen, die durch Bense (1980) in die Semiotik eingeführt wurden, geht es um semiotische Mengen und ihre Klassifikation als Körper, Schiefkörper oder (assoziative bzw. kommutative) Algebren. Der folgende Text ist eine revidierte Fassung aus Toth (2007).

2. Semiotische Körper

Sei K die Menge mit den Elementen 0 und 1, d.h. K = {0, 1}, und den zwei inneren Verknüpfungen Addition ("+") und Multiplikation ("·"), die wie folgt definiert seien:

$0 + 0 = 0 \qquad 0 \cdot 0 = 0$

$0 + 1 = 1 \qquad 0 \cdot 1 = 0$

$1 + 0 = 1 \qquad 1 \cdot 0 = 0$

$1 + 1 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$

Es wird gezeigt, daß K die Körperaxiome erfüllt. Die Kommutativität der Addition ist erfüllt:

$0 + 0 = 0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 1 + 1 = 0$

Die Assoziativität der Addition ist ebenfalls erfüllt:

$0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$

$0 + (0 + 1) = (0 + 0) + 1 = 1$

$0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0 = 1$

$1 + (0 + 1) = (1 + 0) + 1 = 0$

$1 + (1 + 0) = (1 + 1) + 0 = 0$

$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 1$

Die Kommutativität der Multiplikation ist erfüllt:

$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

Ebenso ist die Assoziativität der Multiplikation erfüllt:

$0 \cdot (0 \cdot 0) = (0 \cdot 0) \cdot 0 = 0$

$0 \cdot (0 \cdot 1) = (0 \cdot 0) \cdot 1 = 0$

$0 \cdot (1 \cdot 0) = (0 \cdot 1) \cdot 0 = 0$

$1 \cdot (0 \cdot 1) = (1 \cdot 0) \cdot 1 = 0$

$1 \cdot (1 \cdot 0) = (1 \cdot 1) \cdot 0 = 0$

$1 \cdot (1 \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot 1 = 1$

Gültig sind auch die Distributivgesetze:

$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ $(0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $(0 + 1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot (1 + 0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ $(1 + 0) \cdot 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$

$1 \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ $(0 + 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$

$1 \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$ $(1 + 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$

$1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$ $(1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

Auch die Umkehrbarkeit der Addition ist erfüllt:

$0 - 0 = 0 + 0 = 0$

$0 - 1 = 0 + 1 = 1$

$1 - 0 = 1 + 0 = 1$

$1 - 1 = 1 + 1 = 0$,

d.h. $x = b - a = b + a$. Entsprechendes gilt für die Umkehrbarkeit der Multiplikation.

Ersetzen wir die semiotische Matrix durch die entsprechende Leerstellen-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und ersetzen wir $0 \rightarrow 1$ überall dort, wo wir das entsprechende Subzeichen benötigen, so folgt, dass die semiotische Menge K die Körperaxiome der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllt und somit einen semiotischen Körper darstellt.

Zum Nachweis der Isomorphie von K mit dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ vgl. Toth (2007, Kap. 2.5.2).

3. Semiotische Schiefkörper

Der Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen basiert auf dem sogenannten Permanenzprinzip (Oberschelp 1976, S. 11 ff.): In $\mathbb{N}$ kann nicht immer die Differenz gebildet werden, also werden als neue Zahlen die negativen Zahlen $\mathbb{Z}$ eingeführt. Da in $\mathbb{Z}$ nicht alle Divisionen ausgeführt werden können, führt man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ein. Die Forderung, daß jede Cauchy-Folge konvergiert, führt zu $\mathbb{R}$, und die Lösbarkeit aller algebraischen Gleichungen, also auch von $x^2 + 1 = 0$, liefert $\mathbb{C}$. Bei allen diesen Zahlbereichen von $\mathbb{N}$ bis und mit $\mathbb{C}$ handelt es sich um Körper.

1843 erfand Hamilton die Quaternionen, kurz darauf konstruierten Graves und Cayley die Oktonionen (Oktaven). Diese neuen „hyperkomplexen“ Zahlensysteme sind nun aber keine Körper mehr, denn bei den Quaternionen ist das Kommutativgesetz und bei den Oktonionen zusätzlich das Assoziativgesetz der

Multiplikation verletzt, es gibt aber noch zu jedem Element $\neq 0$ ein Inverses, weshalb die Division eindeutig ausführbar bleibt und solche Algebren auch Divisionsalgebren genannt werden.

Eine Algebra A ist eine Divisionsalgebra, falls, wenn a, b $\in$ A mit ab = 0, dann ist entweder a = 0 oder b = 0 d.h. A ist eine Divisionsalgebra, wenn Links- und Rechtsmultiplikation durch einen Faktor $\neq 0$ umkehrbar sind. Eine normierte Divisionsalgebra ist eine Algebra A, welche zugleich ein normierter Vektorraum ist mit $||ab|| = ||a|| \, ||b||$. Es gibt genau vier normierte Divisionsalgebren: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$. Dass eine Algebra assoziativ ist, bedeutet, dass die durch beliebige drei Elemente von A erzeugte Subalgebra assoziativ ist. $\mathfrak{O}$ ist zwar nicht-assoziativ, aber alternativ, was bedeutet, daß die durch beliebige zwei Elemente erzeugte Subalgebra assoziativ ist. (Alternativität ist also eine schwächere Bedingung als Assoziativität.) Es gelten folgende Sätze:

Satz von Zorn: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$ sind die einzigen alternativen Divisionsalgebren.

Satz von Kervaire-Bott-Milnor: Alle Divisionsalgebren haben Dimension 1, 2, 4 oder 8.

Wie wir letzten Kapitel gesehen haben, ist die Peirce-Bense-Semiotik isomorph zu $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Nur indirekt dagegen läßt sich die Isomorphie der Semiotik mit den Schiefkörpern $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$ beweisen, denn die Konstruktion von semiotischen Einheiten wie Subzeichen, Zeichenrümpfen, Zeichenklassen und Realitätsthematiken aus 4- bzw. 8-dimensionalen Gliedern ist bisher ungelöst. Doch haben wir die Sätze von Frobenius und von Peirce, welche $\mathbb{H}$ als einzigen echten endlich-dimensionalen Schiefkörper über $\mathbb{R}$ charakterisieren:

Satz von Frobenius: "Wir sind also zu dem Resultate gelangt, dass ausser den reellen Zahlen, den imaginären Zahlen und den Quaternionen keine andern complexen Zahlen in dem oben definirten Sinne existieren" (Frobenius 1878, S. 63).

Satz von Peirce: "Thus it is proved that a fourth independent vector is impossible, and that ordinary real algebra, ordinary algebra with imaginaries, and real quaternions are the only associative algebras in which division by finites yields an unambiguous quotient” (Peirce 1881, S. 229).

Daraus folgt also die Isomorphie der Semiotik mit $\mathbb{H}$. Da nun die Semiotik nicht nur assoziativ, sondern auch alternativ ist und da wir den Satz von Zorn bzw. den folgenden Struktursatz haben:

Satz von Zorn: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle, aber nicht assoziative Algebra A ist zur Cayley-Algebra $\mathfrak{O}$ isomorph (Ebbinghaus et al. 1992, S. 216).

Struktursatz: Jede nullteilerfreie, alternative, quadratisch reelle Algebra ist isomorph zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ oder $\mathfrak{O}$. (Ebbinghaus et al. 1992, S. 216),

so folgt hieraus die Isomorphie der Semiotik mit $\mathfrak{O}$. Da ferner im Falle von $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$ die Loop-Eigenschaft einen guten Ersatz bietet für die fehlende Assoziativität einer Divisionsalgebra (vgl. Conway und Smith 2003, S. 88), da, wie wir in Toth (2007) gezeigt haben, semiotische Gruppen Moufangsch sind und da $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$ selber Moufang-Loops sind, folgt auch hieraus die Isomorphie der Semiotik mit $\mathbb{H}$ und $\mathfrak{O}$, so daß wir also berechtigt sind, von semiotischen Schiefkörpern bzw. von hyperkomplexer (quarternionärer bzw. oktonionärer) Semiotik zu sprechen.

<u>Nachbemerkung: </u>Da der Satz von Wedderburn besagt, dass jeder endliche Schiefkörper ein Körper ist, und da die semiotische Menge S = (1, 2, 3) bzw. K = (1, 0) endlich sind, könnte man – falls es nicht so mühsam ist -, zuerst den Schiefkörper-Nachweis der Semiotik erbringen und darauf den Körpernachweis folgern. Es ist indessen viel einfacher so vorzugehen, wie wir es hier getan haben.

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III/3, 1980

Conway, John Horton/Smith, Derek Alan, On Quaternions and Octonions. Natick, Ma. 2003

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (et al.), Zahlen. Heidelberg 1992

Frobenius, Ferdinand Georg, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen. In: Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 84, 1878, S. 1-63

Oberschelp, Arnold, Aufbau des Zahlensystems. 3. Aufl. Göttingen 1976

Peirce, Charles Sanders, On the algebras in which division is unambiguous. In: American Journal of Mathematics 4, 1881, S. 225-229

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Sind Peirce-Zahlen transfinit?

Über die spezifische Natur der von mir als Peirce-Zahlen bezeichneten, von Bense so genannten Primzeichen (1981, S. 17 ff.) gibt es bisher genau 3 Vorschläge:

1. Das Zeichen umfasst 3 verschiedene Peirce-Zahlen

1.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. $(1.1) \rightarrow (2.1) \rightarrow (3.1)$

$\sigma(a.1) = ((a+1).1)$

Ordnung: $(a.b\ c.d\ e.f)$ mit $a > c > e$

1.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. $(1.1) \rightarrow (1.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(1.a) = (1.(a+1))$

Ordnung: $(a.b\ c.d\ e.f)$ mit $b \leq d \leq f$

1.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: $(1.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (3.3)$

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: $(3.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Ordnungen: $(a.a\ b.b\ c.c)$ mit $(a.a) \ll (b.b) \ll (c.c)$ bzw. $(a.a) \gg (b.b) \gg (c.c)$

$(a.b\ c.c\ b.a)$ mit $(a.b) <> (c.c) <> (b.a)$

2. Das Zeichen als komplexe Zahl

Dieser an sich hoch interessante Vorschlag ist leider nie ausgearbeitet worden. Es wurzelt im Grunde wohl in der Idee de Saussures (1967, S. 140 ff.), die Zeichen negativ zu definieren. Explizit wurde der Vorschlag, das Zeichen als komplexe Zahl, d.h. mittels der Definition $z = a + bi$, zu bestimmen, von Frank (2000) formuliert, vgl. auch Toth (2004). Das würde bedeuten, dass man von einer binären Relation bzw. Funktion ausgeht, und zwar mit einer reellen Domäne und einer imaginären Codomäne. Das könnte man dahingehend interpretieren, diese Funktion als Abbildung eines Objektes auf ein Zeichen, d.h. als Semiose zu interpretieren: $\Omega \rightarrow ZR$, wobei dann die abzubildenden Objekte als "reell“, die abgebildeten Zeichen aber als „imaginär“ zu betrachten wären.

3. Das Zeichen als transfinite Zahl

Der dritte, bisher unpublizierte, Vorschlag, bedeutet, die Peirce-Zahlen als transfinit aufzufassen. Vgl. die folgende Gegenüberstellung einiger Gesetze der transfiniten Kardinalzahl-Arithmetik (vgl. z.B. Conway/Guy 1995, S. 280 f.) mit denjeningen, die innerhalb einer Zeichen- und Objektarithmetik zu gelten scheinen:

$\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$

Da wir für die Alefs Zeichen gesetzt haben, müssen wir für die natürlichen Zahlen Objekte setzen. Wir bekommen daher

$ZR + \Omega = \Omega + ZR = ZR$

Beispiel: „symphysische Verwachsung“ (Bühler) von Zeichen und Objekt entweder zu Zeichenobjekt oder zu Objektzeichen. Das Ergebnis ist in beiden Fällen ein „semiotisches Objekt“ (Bense ap. Walther 1979, S. 122 f.), also ein Zeichen.

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

$ZR + ZR = ZR$

Wie bereits in Toth (2009) bemerkt, ändert sich nichts, ob z.B. an einer Strassenkreuzung 1, 2 oder 15 Stoppschilder aufgestellt werden.

$\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Ist wegen

$\aleph_0 + n = n + \aleph_0 = \aleph_0$ (Ersetzung der Multiplikation durch Addition) korrekt.

$\aleph_0 = \aleph_0^n$

Ist wegen Ersetzung der Potenzierung durch Multiplikation korrekt.

$\aleph_0^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$

Ist wegen der vorherigen Gleichung und wegen $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0 = n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ korrekt.

Zeichen und Objekt erfüllen also die arithmetischen Gesetze transfiniter Zahlen und können deswegen als solche aufgefasst werden. Dass sie Gesetzen folgen, die unter den quantiativen Zahlen nur unendlichen Mengen vorbehalten sind, dürfte an dem zeicheninternen Interpretanten liegen, der die Selbstreproduktion der Zeichen bewirkt.

Dieses erstaunliche Ergebnis ist auch deshalb bemerkenswert, weil die Zeichen im Gegensatz zu den Objekten nämlich die finiten arithmetischen Gesetze NICHT erfüllen. Wenn ich 1 Apfel und 1 Apfel addiere, bekomme ich 2 Äpfel, d.h. ich habe mehr als zuvor (mit einem Apfel). Wenn ich aber 2 Polizeimützen trage, fällt das zwar auf, aber ich bin deswegen doch nur ein einziges Mal Polizist. Man beachte, dass speziell bei den semiotischen Objekten wie Wegweiser, Stoppschildern usw. bei der Addition nur die (objektalen) Zeichenträger addierbar sind: Wenn an der Kreuzung zwei Stoppschilder stehen statt einem, so sind es zwar material zwei Objekte, aber die Bedeutung, d.h. die semiotische Handlungsanweisung „Anhalten!“, wird durch die Verdoppelung nicht verändert.

Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Conway, John Horton/Richard K. Guy, The Book of Numbers. Now York 1995

de Saussure, Ferdinand, Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft. 2. Aufl. Berlin 1967

Frank, Helmar, Zur Modellreihen-Entwicklung der deutschen Sprache und der anderen Sprachen Europiens. Ein axiomatisch-interlinguistischer Beitrag zum Aufbau der Eurologie als künftigem Schulfach. In: Germanistische Beiträge 14, 2000 (= Festschrift für Horst Schuller)

Toth, Alfred, Linguistische Grundlagen des Hermannstädter Programms. In: Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft 45/2, 2004, S. 69-80

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf (2009)

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Zur semiotischen Relevanz 4-wertiger Morse-Thue-Folgen

1. Morse-Thue-Folgen lassen sich am einfachsten durch die folgende Übersicht aus Wolframs „MathWorld" einführen:

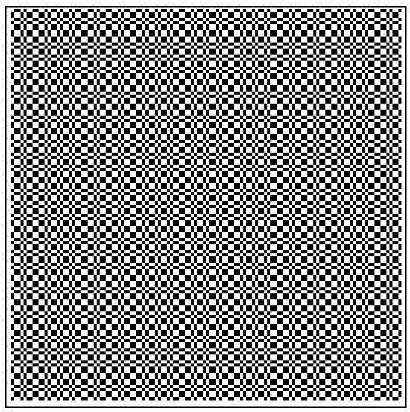
The Thue-Morse sequence, also called the Morse-Thue sequence or Prouhet-Thue-Morse sequence (Allouche and Cosnard 2000), is one of a number of related sequences of numbers obtained from the parities of the counts of 1's in the binary representation of the nonnegative integers.

The version obtained by directly taking the parities is

$$t_n = s_2(n) \pmod 2, \qquad (1)$$

where $s_2(n)$ is the binary digit sum. For $n = 0, 1, 2, \ldots$, the first few terms are then given by 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, ... (Sloane's A010060; Allouche and Shallit 2003, pp. 15 and 153). An alternate form of the sequence obtained by the taking the binary complement is given by 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, ... (Sloane's A010059; Wolfram 2002, p. 890).

Interpreting the Thue-Morse sequence as concatenated binary digits gives the Thue-Morse constant.



2. Geht man von einer 4-wertigen Morse-Thue-Sequenz aus, ergeben sich erstaunliche Parallelen zur Semiotik, wenn man die Bensesche Zeichendefinition (Bense 1979, S. 53)

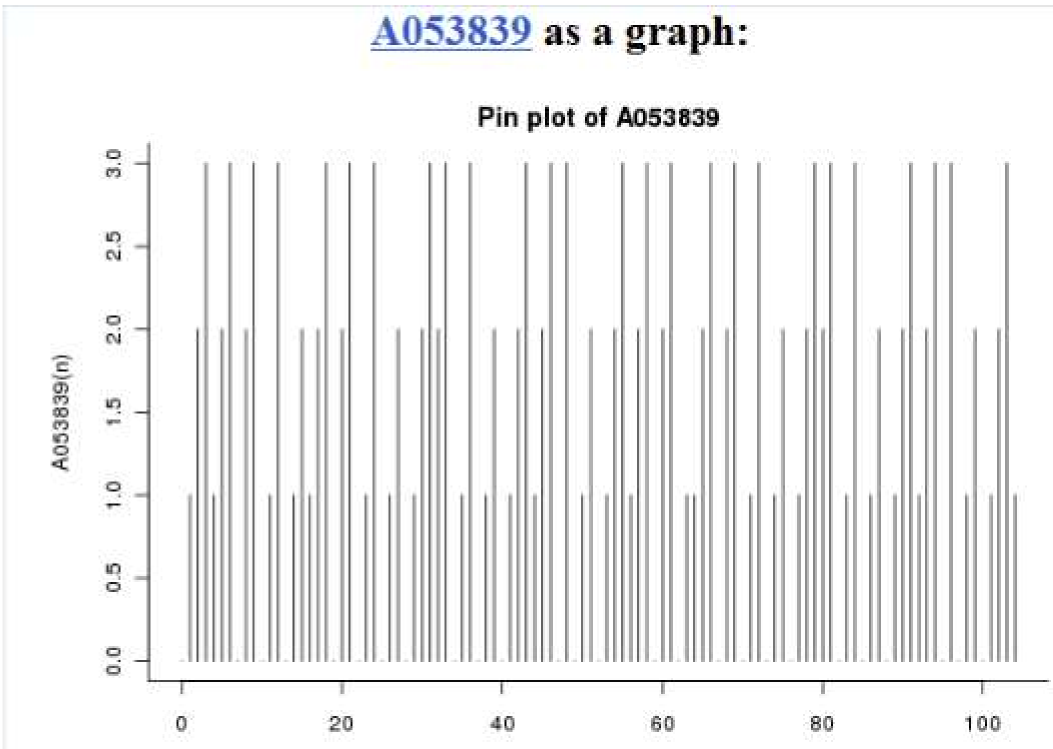
ZR = (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3)))

benutzt. Die Seqenz lautet (A053839 OEIS):

A053839 (Sum of digits of n written in base 4) modulo 4. +30 2

0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1,
3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0,
3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 2, 3, 0, 1,
3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 2, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 0,
3, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1 (list; graph; listen; history; internal format)

Der Graph sieht folgendermassen aus:



Farbige 4-wertige Morse-Thue-Folge aus Griswold (2004):

Morse-Thue-Folgen sind wie das Zeichen und seine Peirce-Zahlen fraktal und selbstähnlich.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Griswold, Ralph E., Fractal Sequences. Tucson 2004, http://www.cs.arizona.edu/patterns/weaving/webdocs/gre_fctl.pdf

Toth, Alfred, Die triadische Zeichenrelation als Fragment einer fraktalen Sequenz. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a

Toth, Alfred, Skizze einer fraktalen Sequenz-Semiotik unter Einschluss der Nullheit. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011b

Ein die drei Peirce-Zahlen vereinigendes semiotisches Zählschema

1. Bei den Dyaden, d.h. den Subzeichen der semiotischen Matrix, müssen drei verschiedene semiotische Zahlen, die ich schon früher „Peirce-Zahlen" genannt habe, unterschieden werden (σ ist der Nachfolge-Operator) (Toth 2011):

1.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. (1.1) → (2.1) → (3.1)

σ(a.1) = ((a+1).1)

1.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. (1.1) → (1.2) → (1.3)

σ(1.a) = (1.(a+1))

1.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: (1.1) → (2.2) → (3.3)

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: (3.1) → (2.2) → (1.3)

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Damit ergibt sich sowohl für haupt- als auch für nebendiagonale Peirce-Zahlen

σ(a.b) = ((a±1).(b±1)).

2. Wie man sieht, haben alle drei Peirce-Zahlen verschiedene Ordnungen:

2.1. Triadische Peirce-Zahlen

(a.b c.d e.f) mit $a > c > e$

2.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

(a.b c.d e.f) mit $b \leq d \leq f$

2.3. Diagonale Peirce-Zahlen

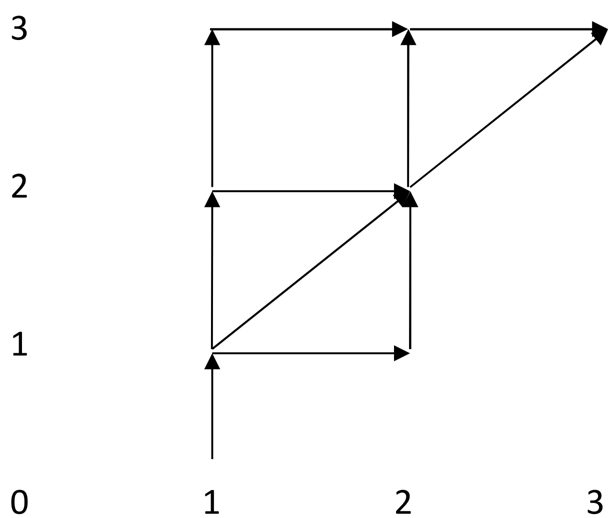
2.3.1. (a.a b.b c.c) mit (a.a) ≪ (b.b) ≪ (c.c) bzw. (a.a) ≫ (b.b) ≫ (c.c)

2.3.2. (a.b c.c b.a) mit (a.b) <> (c.c) <> (b.a)

3. Neben den erwähnten algebraischen und ordnungstheoretischen Besonderheiten haben die drei Arten von Peirce-Zahlen die folgende, bereits von Bense (1979, S. 53) gegebene topologische Charakteristik:

PZR = (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3))).

4. Damit können wir, die bisherigen mathematischen Eigenschaften zusammenfassend, das folgende semiotische Zählschema vorschlagen:



Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Ein fixierter Sequenzoperator für die Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Kategoriale Struktur des semiotischen Zählschemas

1. Spiegelt man den in Toth (2011) vorgeschlagenen vervollständigten semiotischen Zählbereich

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\
\emptyset \arrow[r] & \emptyset \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3,
\end{tikzcd}$$

dann kann man ihn in 8 kommutierende Quadrate zerlegen, die jeweils über die Mittelachse des Zählbereichs miteinander zusammenhängen:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\
\emptyset \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

$(\emptyset \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow \emptyset) = (\emptyset \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow \emptyset)$

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\emptyset} \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \mathbf{2}
\end{tikzcd}$$

$(1 \rightarrow \mathbf{2}) \circ (\boldsymbol{\emptyset} \rightarrow 1) = (\emptyset \rightarrow 2) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\
2 \arrow[r] & \emptyset
\end{tikzcd}$$

$(2 \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow 2) = (\emptyset \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\ \emptyset \arrow[r] & \emptyset \end{tikzcd}$$

$(\emptyset \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset) = (\emptyset \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ \emptyset \arrow[r] & \emptyset \end{tikzcd}$$

$(\emptyset \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset) = (1 \rightarrow \emptyset) \circ (\emptyset \rightarrow 1)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ \emptyset \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

$(\emptyset \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow \emptyset) = (2 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 2)$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\ 1 \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

$(1 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 1) = (\emptyset \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow \emptyset)$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\emptyset} \arrow[r] \arrow[d] & \emptyset \arrow[d] \\ 2 \arrow[r] & \mathbf{3} \end{tikzcd}$$

$(2 \rightarrow \mathbf{3}) \circ (\boldsymbol{\emptyset} \rightarrow 2) = (\emptyset \rightarrow 3) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$

6 von diesem kommutativen Quadraten sind also homogen, d.h. es gilt für ein $x \in \{1, 2, 3\}$ $x \in COD = x \in DOM$. In 2 Fällen ist diese Bedingung nicht gegeben:

$(1 \rightarrow \mathbf{2}) \circ (\boldsymbol{\emptyset} \rightarrow 1) = (\emptyset \rightarrow 2) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$

$(2 \rightarrow \mathbf{3}) \circ (\boldsymbol{\emptyset} \rightarrow 2) = (\emptyset \rightarrow 3) \circ (\emptyset \rightarrow \emptyset)$,

d.h. hier liegen, um mit Kaehr (2009) zu sprechen, heterogene Konkatenationen vor, und man muss auf die von Kaehr eingeführte Strategie der „matching conditions" ausweichen, um überhaupt eine semiotische Verbindung herzustellen, da diese Fälle klassisch ja natürlich ausgeschlossen sind. Das bedeutet aber, dass wir hier bereits auf klassischer kategorietheoretischer Ebene im Falle des vervollständigten semiotischen Zählschemas wieder eine der von mir schon so oft hervorgehobenen zahlreichen „Einbruchstellen" polykontexturaler Strukturen in monokontexturale vor uns haben. Solche gibt es, wie Kaehr im Rahmen der von ihm geschaffenen polykontexturalen Semiotik detailliert aufgezeigt hat, nur im Rahmen der semiotischen Diamantentheorie, genauer: zwischen Bi-Zeichen. Das bedeutet aber für uns nichts anderes, als dass das vervollständigte semiotische Zählschema neben den monokontexturalen Peirce-Zahlen auch bereits ihre spiegelhaften polykontexturalen Schatten mitführt, dass Zeichen also bereits die Spuren von Bi-Zeichen tragen, die dann in der polykontexturalen Semiotik im Rahmen ihrer Eingebundenheit in „Texteme" und „Diamanten" die basalen Einheiten bilden.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Xanadu´s Textemes. In:
http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Xanadu-textemes/Xanadu-textemes.pdf
(2009)

Toth, Alfred, Vervollständigung des semiotischen Zahlenschemas. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2011

Vervollständigung des semiotischen Zahlenschemas

1. Obwohl Bense (1981, S 17 ff.) die Einführung der Primzeichen in Anlehnung an die Einführung der natürlichen Zahlen durch Anwendung der Peano-Axiome, ausgehend von der linearen Relation PZ = (.1., .2., .3.), zu begründen suchte, hat er selber bereits früher die korrekte Relation in der Form

ZR = (.1., ((.1. → .2.), (.1. → .2. → .3.))),

d.h. als verschachelte Relation bzw. „triadisch gestufte Relation von Relationen" eingeführt.

2. In der Semiotik wird also „gestuft", d.h. nicht mono-linear, sondern poly-linear gezählt (Toth 2011):

$$
\begin{array}{lll}
 & & 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \\
 & 1 \rightarrow 2 \rightarrow \uparrow & \\
1 \rightarrow \uparrow & &
\end{array}
$$

denn nur auf diese Weise kann der Tatsache Rechnung getragen werden, dass es nicht eine, sondern drei Arten von semiotischen Zahlen gibt, die sich durch ihre Ordnungsrelation unterscheiden:

1. Triadische Peirce-Zahlen: $1. < 2. < 3.$

2. Trichotomische Peirce-Zahlen: $.1 \leq .2 \leq .3$

3. Diagonale Peirce-Zahlen: $1.1 \ll 2.2 \ll 3.3.$

3. Zählt man linear, wie etwa bei den Peano-Zahlen, d.h.

1, 2, 3, ..., n,

wo sich das (n+1)-te Glied einfach durch Anwendung eines Sukzessionsoperator ($\sigma(n) = (n+1)$) ergibt, ohne dass irgendwo die Gefahr „flächiger Abweichung" (Rosser) besteht, dann stellt sich auch nicht das Problem, vor wessen Hintergrund gezählt wird. Sobald wir aber stattdessen von einer poly-linearen „layer-„Struktur ausgehen, entsteht nicht nur ein flächenartiges Zählschema, sondern wegen der triadischen „Verschachtelung“ entstehen auch lineare Leerräume vor und nach den semiotischen Zahlen. Man kann das wie folgt andeuten:

$\varnothing \qquad \varnothing \quad \varnothing \quad 1 \to 2 \to 3$

$\varnothing \qquad 1 \to 2 \to \uparrow \quad \varnothing \quad \varnothing$

$1 \to \ \uparrow \quad \varnothing \quad \varnothing \quad \varnothing \quad \varnothing.$

Allerdings fehlen in dieser Darstellung die morphismischen Abbildungen zwischen den Leerstellen. Folgt man der obigen Definition des Zeichens, wie sie Bense (1979, S. 53, 67) gegeben hatte, gibt es nur eine Möglichkeit, dieses Zählschema sowohl durch Objekte wie auch durch die Abbildungen zwischen ihnen zu vervollständigen:

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[r, dashed] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \\
\varnothing \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & 1 \arrow[u, dashed] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[u, dashed] \\
1 \arrow[u, dashed] \arrow[r] & \varnothing \arrow[u] \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[u, dashed] \arrow[r, dashed] & \varnothing \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd} \quad .$$

Damit gelten also u.a. folgende Beziehungen:

$(1 \to \varnothing \to 1) = (1 \to \varnothing \to \varnothing \to \varnothing \to 1)$

$(1 \to \varnothing \to 1) \subset ((1 \to 2) = (1 \to \varnothing \to 1 \to 2) = (1 \to \varnothing \to \varnothing \to 2) =$

$1 \to \varnothing \to \varnothing \to \varnothing \to 1 \to 2))$

Wir müssen dann die Nullstellen wie folgt interpretieren:

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, dashed] & \emptyset \arrow[r, dashed] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \\
\emptyset \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & 2 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 2 \arrow[u, dashed] \\
1 \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1, \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd}$$

so dass die Inklusionen sowohl in der Horizontalen wie in der Vertikalen erfüllt sind.

Damit entsteht in der linken oberen Ecke eine interessante Dreicksmatrix von Nullheiten. Wenn wir horizontal die „layers“ der poly-linearen Zählung berücksichtigen

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[r, dashed] & \emptyset \arrow[r, dashed] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 & n+2 \\
\emptyset \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 2 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & 2 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 2 \arrow[u, dashed] & n+1 \\
1 \arrow[r] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[r, dashed] \arrow[u, dashed] & 1 \arrow[u, dashed] & n,
\end{tikzcd}$$

dann bekommen wir also einerseits erwartungsgemäss

$(1^{n} \subset 2^{n+1})$

$(2^{n+1} \subset 3^{n+2})$

$(1^{n} \subset 3^{n+2})$,

andererseits aber auch

$((1^{n} \subset \emptyset^{n+1} \subset \emptyset^{n+2})$

$(1^{n} \subset 1^{n+1} \subset \emptyset^{n+2})$

$(1^{n} \subset 2^{n+1} \subset 1^{n+2})$

$(1^{n} \subset 2^{n+1} \subset 2^{n+2})$

$(1^n \subset 2^{n+1} \subset 3^{n+2})$.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Semiotisches Zählen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Ein fixierter Sequenzoperator für die Semiotik

1. Jede mathematische Semiotik muss im Minimum die Peano-Axiome erfüllen, um wenigtens als semiotische Arithmetik zu gelten. Diese Axiome lauten in einer älteren und einer neueren Fassung:

P1. 1 ist eine natürliche Zahl.

P2. Jede natürliche Zahl a hat einen bestimmten Nachfolger σ(a) in der Menge der natürlichen Zahlen.

P3. Stets ist σ(a) ≠ 1, d.h. es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1. (van der Waerden 1971, S. 6)

P1´. $0 \in \mathbb{N}$.

P2´. Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $\sigma(n) \in \mathbb{N}$.

P3´. Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann $\sigma(n) \neq 0$.

P´4. Wenn $0 \in E$, und wenn aus $n \in E$ stets $\sigma(n) \in E$ folgt, $\mathbb{N} \subset E$.

P´5. Wenn $m, n \in \mathbb{N}$, folgt aus $\sigma(m) = \sigma(n)$, dass $m = n$ ist. (Ebbinhaus et al. 1992, S. 17)

2. Wie ich in Toth (2011) gezeigt habe, lassen sich die Peano-Axiome einheitlich nur auf die Monaden, oder wie Bense (1981, S. 17 ff.) sagte, Primzeichen, anwenden:

PZR = (.1., .2., .3.),

d.h. es gilt einfach σ(.1.) = (.2.), σ(.2.) = (.3.) und daher σσ(.1.) = (.3.).

Sobald wir jedoch zu komplexen Relationen, d.h. Dyaden, Dyaden-Paaren, Triaden usw. übergehen, gibt es keine einheitliche Gültigkeit für den Sequenzoperator mehr. Bei den Dyaden, d.h. den Subzeichen der semiotischen Matrix müssen drei verschiedene Arten, die ich schon früher „Peirce-Zahlen“ genannt habe, unterschieden werden.

2.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. (1.1) → (2.1) → (3.1)

$\sigma(a.1) = ((a+1).1)$

2.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. (1.1) → (1.2) → (1.3)

$\sigma(1.a) = (1.(a+1))$

2.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: (1.1) → (2.2) → (3.3)

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: (3.1) → (2.2) → (1.3)

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Damit ergibt sich sowohl für haupt- als auch für nebendiagonale Peirce-Zahlen

$\sigma(a.b) = ((a\pm1).(b\pm1))$.

3. Wenn wir nun aber Zeichenklassen und Realitätsthematiken heranziehen, wie z.B. (3.1 2.2 1.3) und (3.2 2.2 1.2), wie lässt sich dann entscheiden, welche von beiden Vorgänger und welche Nachfolger ist? Klare Fälle liegen ja nur z.B. bei (3.1 2.1 1.1) und (3.1 2.1 1.2) vor, und die trichotomische Ordnung (3.a 2.b 1.c) mit a ≤ b ≤ c allein verbietet die Existenz eindeutiger Nachfolger bzw. Vorgänger, damit aber auch die Anwendung der Peano-Axiome.

Ich möchte deshalb einen positions- und wertegebundenen Sequenzoperator einführen, der den Wert einer bestimmten n-adische Relation an der Position i durch den Nachfolgewert j ersetzt:

$$\sigma_j^i = \left(\boxed{}\ \underset{i}{\boxed{j}}\ \boxed{} \right)$$

Z.B. ist also

σ_3^6 (3.1 2.1 1.2)= (3.1 2.1 1.3)

σ_2^4 (3.1 2.1 1.2)= (3.1 2.2 1.2),

d.h. es ist

σ(3.1 2.1 1.2) = {(3.1 2.1 1.3), (3.1 2.2 1.2)},

und das sind die einzigen unmittelbaren Nachfolger von (3.1 2.1 1.2), denn *(3.2 2.1 1.2) ist irregulär wegen ((3.a), (2.b)) mit a > b.

Da man Zeichenklassen eineindeutig auf ihre Trichotomien (Realitätsthematiken) abbilden kann, genügt es, den Subsequenzoperator auf Zahlentripel der Form <a, b, c> mit a ≤ b ≤ c abzubilden. Man beachte, dass hier nichts anderes als die Primzeichenrelation (PZR), allerdings mit partieller Ordnung, vorliegt. Wir bekommen also für die obigen Beispiele:

σ_3^3 (1, 1, 2)= (1, 1, 3)

σ_2^2 (1, 1, 2)= (1, 2, 2),

d.h. σ(1, 1, 2) = {(1, 1, 3), (1, 2, 2)}.

Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Ebbinghaus, H.D. et al., Zahlen. Springer 1992

Toth, Alfred, Wie viele Arten von Primzeichen gibt es? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

van der Waerden, B.L., Algebra I. Heidelberg 1981

Inhärente Triadizität semiotischer Dyaden

1. Einen Meilenstein bedeutet für die Semiotik Kaehrs Entdeckung, dass Monaden durch Selbstabbildung entstehen, d.h.

$1 := 1 \rightarrow 1$

(Kaehr 2008). Wie soeben (Toth 2011) dargestellt, müssen wir aber 3 Arten von Monaden in der Semiotik unterscheiden, die sich durch vrschiedene Wirkungen des Subsequenz-Operators, d.h.der Peano-Axiome, unterscheiden:

1.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. $(1.1) \rightarrow (2.1) \rightarrow (3.1)$

$\sigma(a.1) = ((a+1).1)$

1.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. $(1.1) \rightarrow (1.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(1.a) = (1.(a+1))$

1.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: $(1.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (3.3)$

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: $(3.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Daraus folgt, dass $1 \rightarrow 1 = 1$ nicht, genügt; es gibt vielmehr folgende 4 Kombinationen von tdP und ttP:

a) $1. \circ .1 = .1.1 = x.1.1$

b) $.1 \circ 1. = 1..1 = 1.x.1 = 1.1$

c) $1. \circ 1. = 1.1. = 1.1.x$

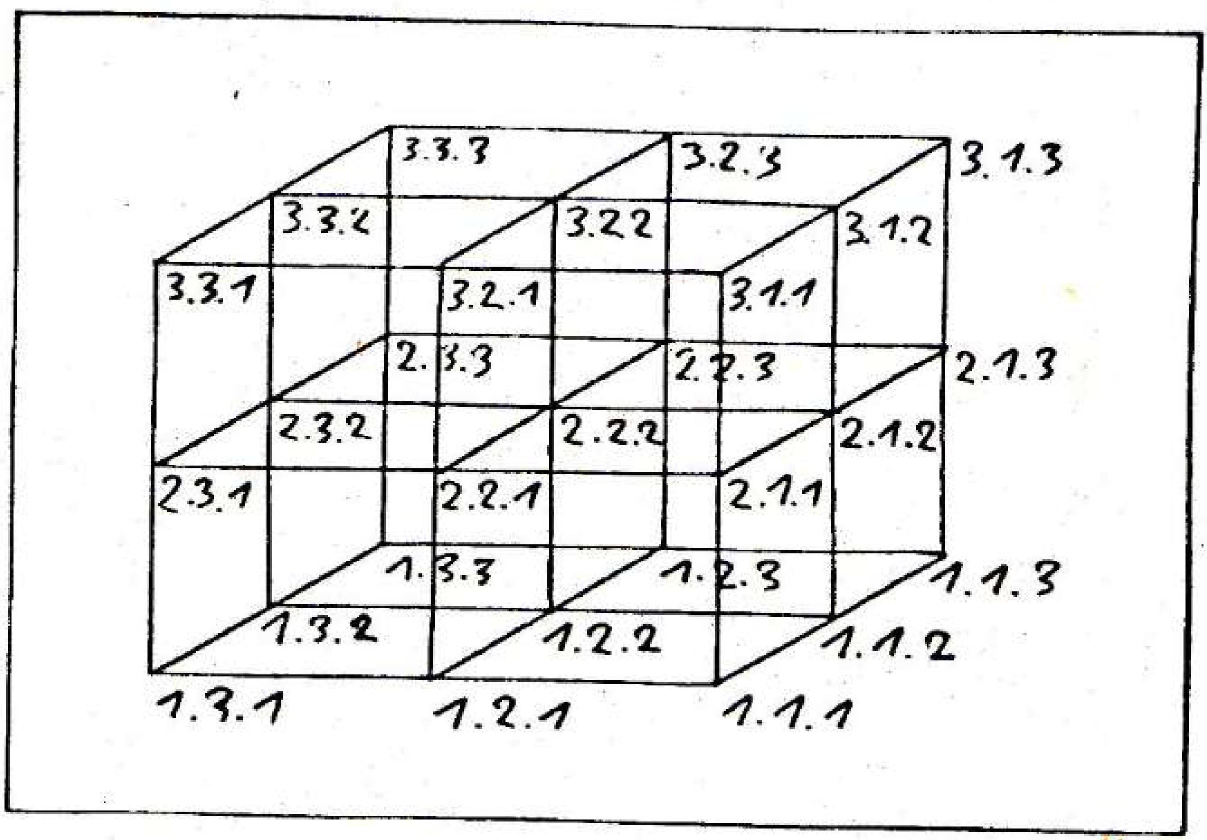
d) 1. ∘ .1 = .11. = x.1.x = .1.

Nur in b) und d) entstehen also Monaden und Dyaden, in den beiden übrigen Fällen aber entstehen

(x.1.1) mit x ∈ {1, 2, 3}

(1.1.x) mit x ∈ {1, 2, 3},

d.h. triadische statt dyadischer Subzeichen. Dein einfachste Interpretation der zusätzlich geschaffenen relationalen Leerstelle in diejenige von Platzhaltern für semiotische Dimensionszahlen (vgl. Toth 2009), wie sie für die 3-dimensionale Semiotik von Stiebing benutzt wurden:



Während also das 2-dimensionale Subzeichen sich als Paar aus einer triadischen und einer trichotomischen Peirce-Zahl darstellen lässt:

2-SZ = (tdZ, ttP),

benötigt man zur Darstellung 3-dimensionaler Subzeichen einer weiteren Zahlenart, der Dimensionszahlen

dZ = {1, 2, 3, ..., n} $\subseteq \mathbb{N}$,

diese gehorchen nun weder den Gesetzen der tdP, ttP oder dgP, sondern sind einfach natürliche Zahlen, d.h. es gibt keine ordnungstheoretischen Beschränkungen zwischen dZ einerseits und den Peirce-Zahlen andererseits. Wir haben allerdings zwei strukturelle Möglichkeiten, Dimensionszahlen als Tripel aus Peirce-Zahlen und je einer natürlichen Zahl zu schreiben:

(x.1.1) = <dZ, tdP, ttP>

(1.1.x) = <tdP, ttP, dZ>,

d.h. der theoretisch mögliche „Sandwich-Fall"

(1.x.1) tritt nicht, ausser, man erklärt die diagonalen Peirce-Zahlen als Zusammenziehungen triadischer Tripel der Form 3-dgP = <tdP, dZ, ttP>.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, http://www.thinkartlab.com/ pkl/lola/**Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-** in**-Diamonds.**html (2008)

Toth, Alfred, Wie viele Arten von Primzeichen gibt es? In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

Wie viele Arten von Primzeichen gibt es?

1. Bekanntlich hatte Max Bense die Peirceschen Fundamentalkategorien als Primzeichen eingeführt (Bense 1980, auch 1981, S. 17 ff.). Er definierte sie als Teilmenge der natürlichen Zahlen

PZR = (.1., .2., .3.),

für die bekanntlich die Peano-Axiome gelten:

1. 1 ist eine natürliche Zahl.

2. Jede natürliche Zahl a hat einen bestimmten Nachfolger σ(a) in der Menge der natürlichen Zahlen.

3. Stets ist σ(x) ≠ 1,

d.h. es gibt keine Zahl mit dem Nachfolger 1 (van der Waerden 1971, S. 5).

2. Wenn wir allerdings von den Primzeichen zu den Subzeichen fortschreiten, sieht die Sachlage ganz anders aus: Ist z.B. (3.3) oder (2.2) oder (3.2) der Nachfolger von (2.1)? Oder hat (2.1) – und evtl. alle Subzeichen? – mehrere Nachfolger, was natürlich bedeuten würde, dass die Peano-Axiome nur für Monaden, nicht aber für höhere relationale semiotische Gebilde gelten wüden. Und wie ist es erst bei Zeichenklassen? Sicherlich ist (3.1 2.1 1.2) der Nachfolger von (3.1 2.1 1.1), aber steht es z.B. mit (3.2 2.2 1.3) und (3.1 2.2 1.2)?

3. Es scheint, als ob man das Problem nur dadurch lösen könnte, dass man 3 verschiedene semiotische Zahlen annimmt –wir wollen sie statt Primzeichen lieber „Peirce-Zahlen" nennen:

3.1. Triadische Peirce-Zahlen

tdP: z.B. (1.1) → (2.1) → (3.1)

σ(a.1) = ((a+1).1)

3.2. Trichotomische Peirce-Zahlen

ttP: z.B. $(1.1) \rightarrow (1.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(1.a) = (1.(a+1))$

3.3. Diagonale Peirce-Zahlen

dgP_H: $(1.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (3.3)$

$\sigma(a.b)_H = ((a+1).(b+1))$

dgP_N: $(3.1) \rightarrow (2.2) \rightarrow (1.3)$

$\sigma(a.b)_N = ((a\pm1).(b\pm1))$

Damit ergibt sich sowohl für haupt- als auch für nebendiagonale Peirce-Zahlen

$\sigma(a.b) = ((a\pm1).(b\pm1))$.

Daraus folgt also, dass nicht jedes Subzeichen, aber jede tdP, ttP und dgP ein eindeutig bestimmten Nachfolger bzw. Vorgänger besitzt, d.h. dass für semiotische Matrix die Peano-Axiome gelten.

Sie gelten allerdings nicht für höhere relationale Gebilde, z.B. Zeichenrümpfe der Form ((a.b), (c.d)) oder die Zeichenklassen der Form (3.a 2.b 1.c), und bei letzteren schon deswegen nicht, weil sie Ordnung der ttP innerhalb von Zeichenklassen $a \leq b \leq c$ ist, d.h. dass für die Nachfolgefunktion jeder ttP gilt:

$\sigma(a.b) = \{(a.b), (a.(b+1))\}$.

Dasselbe gilt natürlich für die Realitätsthematiken (c.1 b.2 a.3), da sie ja Dualia der Zeichenklassen sind.

Dieses Ergebnis, dass die Peano-Axiome nur bis zu den dyadischen semiotischen Relationen gültig sind, hat enorme Konsequenzen für eine mathematische Semiotik. Bekanntlich hatte ich in Toth (2006) den Isomorphie-Nachweis der Benseschen Primzeichen sowohl mit dem Körper der reellen als auch der komplexen Zahlen geliefert. Aus unseren Ergebnissen in der vorliegenden Studie folgt also, dass diese Isomorphie sich auch für die Subzeichen, jedoch getrennt nach den 3 Peirce-Zahlen, beweisen lässt. In Sonderheit folgt allerdings, dass die Peano-Axiome nicht für Zeichenklassen gelten. Das bedeutet jedoch nichts anderes, als dass man mit Zeichenklassen nicht rechnen kann! Es gibt, soweit ich sehe, also nur zwei Auswege: 1. Man tut, als ob Triaden Summen von Dyaden sind (vgl. dazu bereits Walther 1979, S. 79). Dieser Weg wurde z.B. in der verbandstheoretischen Semiotik beschritten uns sagt also über die Zeichen selber, die ja nur in triadischen Relationen solche repräsentieren, im Grunde nichts aus. 2. Man revidiert die Peircesche trichotomisch-inklusive Ordnung und erweitert sie z.B. auf die folgenden 3 Fälle: ($a < b < c$ / $a = b = c$ / $a > b > c$). Man hat dann die folgenden Zeichenklassen zur Verfügung:

3.1 2.2 1.3	3.1 2.1 1.1	
	3.2 2.2 1.2	
	3.3 2.3 1.3	3.3 2.2 1.1,

also nur noch die 3 Hauptzeichenklassen und die beiden Diagonalen.

Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III3, 1980

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

van der Waerdeb, B.L., Algebra I. Heidelberg 1971

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttart 1979

Drei semiotische Arithmetiken

1. Wie bereits in einer früheren Arbeit (Toth 2009), unterscheiden wir drei Arten von Peirce-Zahlen:

1.1. Triadische Peirce-Zahlen (tdP):

$\text{tdP} = 1. < 2. < 3$

KEINE tdP sind demnach z.B. $1. > 2.$, $2. = 3.$, $1. \leq 3.$, $2. \geq 1.$

1.2. Trichotomische Peirce-Zahlen (ttP):

$\text{ttP} = .1 \leq .2 \leq .3$

KEINE ttP sind demnach z.B. $.2 > .1$, $.3 > .1$, $.2 \geq .1$.

1.3. Diagonale Peirce-Zahlen (dgP):

$\text{dgP} = 1.1 \ll 2.2 \ll 3.3$

KEINE dgP sind $1.2 \ll 2.1$, $1.3 \ll 1.2$, $1.1 \ll 2.2$, $2.2 \gg 3.1$.

2. Wie man sofort sieht, folgt die Ordnung keiner der drei Peirce-Zahlen derjenige der natürlichen Zahlen (Peano-Zahlen):

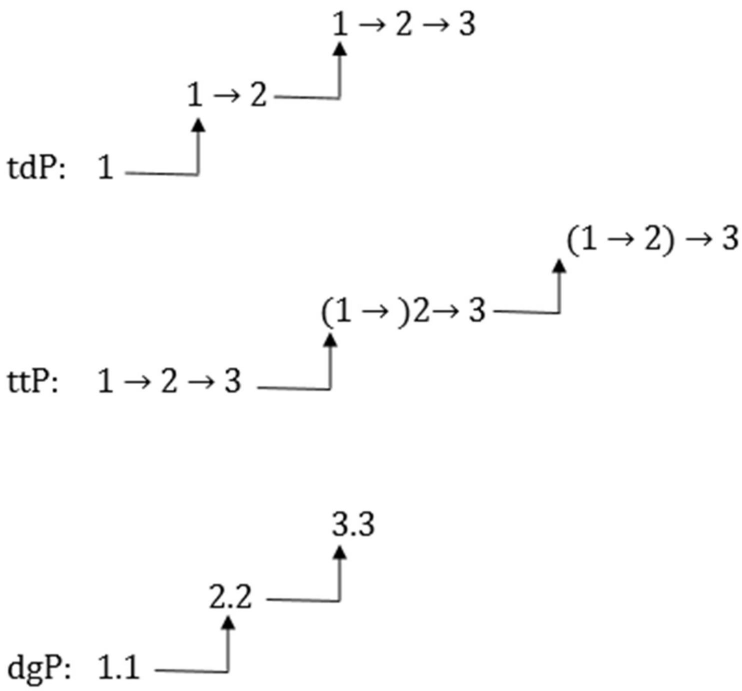
Peano: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \ldots$

tdP: $(1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)))$ (Bense 1979, S. 53)

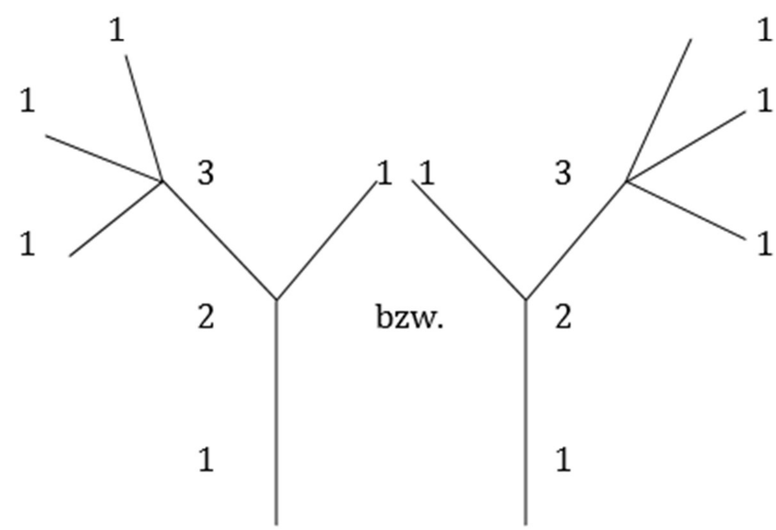
ttP: $(1 \rightarrow ((1/2/3) \rightarrow (1/2/3)))$

dgP: $(1.1 \ll 2.2 \ll 3.3)$

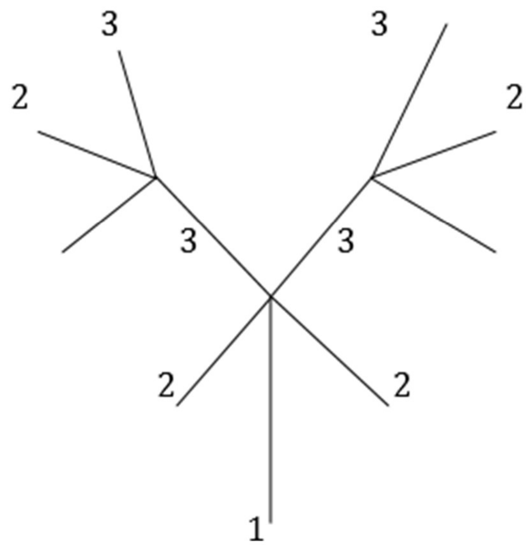
3. Versucht man, diese drei semiotischen Arithmetiken graphisch darzustellen, so kann man das z.B. wie folgt tun:



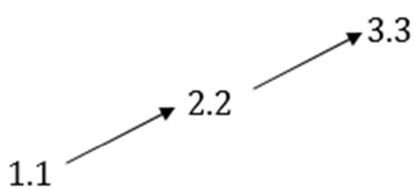
4. Verwendet man Baumdarstellungen, so erhält man für tdP (vgl. Toth 2011):



Für ttP bekommt man



und schliesslich für dgP:



Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf

Toth, Alfred, Semiotisches Zählen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

24.3.2011

Semiotisches Zählen

1. Bekanntlich hatte Bense verschiedentlich (z.B. 1975, S. 167 ff., 1981, S. 17 ff., 1983, S. 192 ff.) den Versuch gemacht, semiotische Generation mit arithmetischer Induktion gleichzusetzen. Wir hätten dann

Peano: 0 → 1 → 2 → 3 → 4 → ...

Peirce: 1 → 2 → 3

d.h., nicht nur fehlt die Null als neutrales Element (dieses ist in der Semiotik 2, vgl. Toth 2006, S. 37 ff., so dass man im, Grunde 2 → 1 → 3 oder 2 → 3 → 1 zählen müsste), sondern die Folge bricht mit dem Erreichen der Dreizahl ab, das nach Peirce alle n-adischen Relationen mit n> 3 auf triadische Relationen reduzierbar sind (vgl. Toth 2007, S. 173 ff.). Was vor allem einer solchen Gleichsetzung widerspricht, ist, dass die von Bense (1979, S. 53) selbst eingeführte Zeichendefinition

ZR = (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3)))

einer Peano-Induktion vollkommen zuwiderläuft, da sie nämlich eine Zählfolge wie z.B.

            1 → 2 → 3
      1 → 2 → ↑
1 → ↑

d.h. eine trilineare Zählung, die eine Bifurkation (1 → (1 → 2)) sowie eine Trifurkation (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3))) aufweist, voraussetzt.

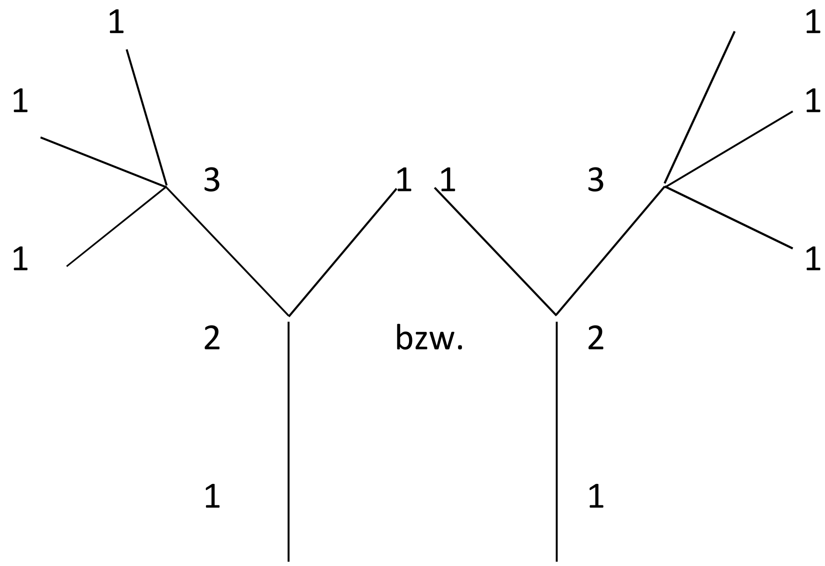
Nur am Rande (weil schon oft darauf hingewiesen wurde) sei vermerkt, dass es im Grunde drei Peirce-Zahlen gibt, deren Zählweise paarweise gar nicht übereinstimmt:

1. Triadische Peirce-Zahlen: 1. < 2. < 3.

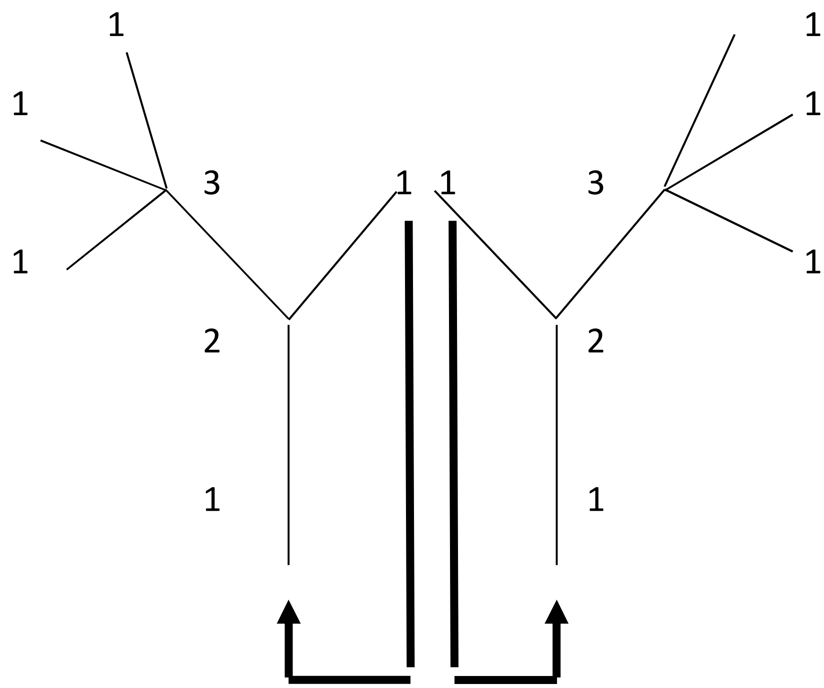
2. Trichotomische Peirce-Zahlen: .1 ≤ .2 ≤ .3

3. Diagonale Peirce-Zahlen: 1.1 << 2.2 << 3.3.

2. Als der Benseschen verschachtelten Definition des Zeichens als einer Relation über Relationen entsprechendes Modell wurde daher in Toth (2011) folgender Bi-Graph vorgeschlagen:

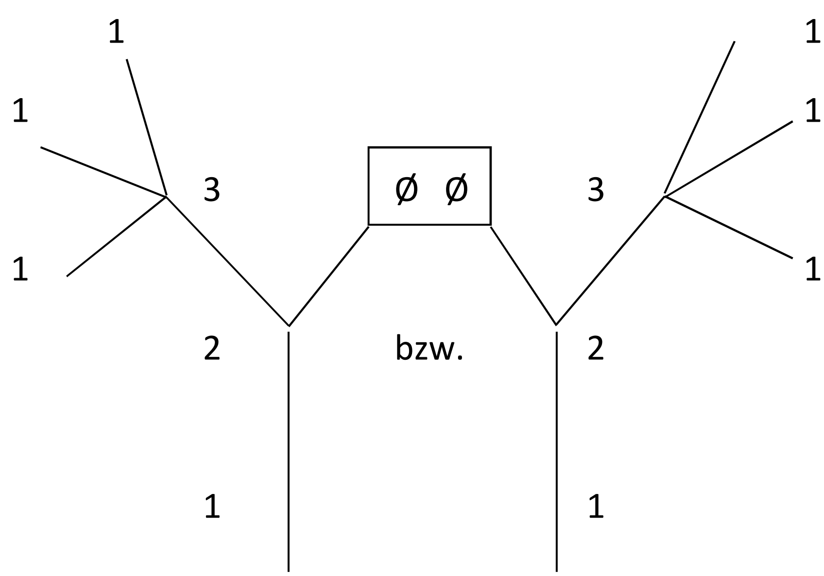


Hier wird also zuerst die 1 gezählt, dann von 1 zu 2, und dann sowohl von 1 als auch von 1 zu 2 zu (1, 2, 3), d.h. dieses Modell entspricht haargenau ZR = (1 → ((1 → 2) → (1 → 2 → 3))), allerdings mit einer Ausnahme: Im Graphen lässt sich die Bifurkation nur so darstellen, dass von 2 aus ein Pfad zu 3 führt, aber auch ein Pfad zu einer monadischen Relation, d.h. zu 1. Damit wird die zyklische Struktur der nicht über triadische Relationen hinausgehenden Peirceschen Zeichenrelationen ohne explizite Zyklizität des Graphen dargestellt, denn man kann sich folgendes vorstellen:



Allerdings kann man diese zweite Einsheit auch als nicht-gesättigte

Relation deuten:



An der eingerahmten Stelle können also nur zwei Erstheiten, d.h. Einsen, stehen, aber da das erste Relatum in ZR die 1 ist, kann hier ein zweites, im Bilde spiegelverkehrtes Zeichen angehängt werden, das an Kaehrs Bi-Sign erinnert (vgl. Kaehr 2009). Während aber in beiden Hälfte die Relationen (1 → 2) identisch sind,

sind (2 → 3) zwar in dieser Ordnung, aber spiegelverkehrt gegeben; dasselbe gilt gilt für die drei Relationen (3 → 1). Die beiden Hälften gehören also offenbar zwei verschiedenen Kontexturen an, som dass wir anzusetzen haben

$(1 \rightarrow 2)$	$\equiv$	$(1 \rightarrow 2)$		
$(2 \rightarrow 3)$	$\not\equiv$	$(2 \rightarrow 3)$	$=$	$(2_{\lambda\rho} \rightarrow 3_{\rho\lambda})$
$(3 \rightarrow 1)^1$	$\not\equiv$	$(3 \rightarrow 1)^1$	$=$	$(3_{\lambda\rho} \rightarrow 1_{\rho\lambda})$
$(3 \rightarrow 1)^1$	$\not\equiv$	$(3 \rightarrow 1)^1$	$=$	$(\ _{\lambda\rho} \rightarrow 1_{\rho\lambda})$
$(3 \rightarrow 1)^1$	$\not\equiv$	$(3 \rightarrow 1)^1$	$=$	$(3_{\lambda\rho} \rightarrow 1_{\rho\lambda})$

$((1 \rightarrow 2) \quad \equiv \quad (1 \rightarrow 2))$ bedeutet also:

$((1 \rightarrow 2) \quad \equiv \quad (1 \rightarrow 2)_{\lambda\rho} \quad = \quad (1 \rightarrow 2)_{\lambda\rho}).$

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Kaehr, Rudolf, Xanadu´s Textemes. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Xanadu-textemes/Xanadu-textemes.pdf (2009)

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Graphen triadischer Zeichenrelationen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2011

Peanozahlen und Conway-“Nimbers” als semiotische Basen

1. An mehreren Stellen (Bense 1975, S. 167 ff.; 1981, S. 17 ff.;1983, S. 192 ff.) hatte Bense die von ihm als Primzeichen bezeichneten „semiotischen Zahlen“ (oder, wie ich sie genannt habe, „Peirce-Zahlen“) analog zu den Peanozahlen, d.h. durch das Prinzip der vollständigen Induktion, eingeführt. Man kann deshalb die Peirceschen Zeichenrelation vereinfacht wie folgt notieren

ZR = (1, 2, 3)

2. Will man nicht einfach zu „höheren“ (z.B. komplexen oder hyperkomplexen) Zahlen übergehen (vgl. Toth 2008, S. 52-63), sondern mit dem Zahlwechsel das einzig für monokontexturale Systeme gültige arithmetische Paradigma wechseln, so empfehlen sich am besten die von J.H. Conway (1986, S. 283 ff.) eingeführten „surrealen“ Zahlen. Im folgenden gebe ich die Additionstabelle aus Conway und Guy 1996, S. 293):

a + b	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

3. Basierend auf diesen “Nimbers”, wie sie Conway nennt, gibt es also nicht nur eine, sondern vier Zeichenrelationen:

$ZR^{(n,1)} = (0, 1, 2, 3) \supset ZR^{p} = (1, 2, 3)$

$ZR^{(n,2)} = (1, 0, 3, 2)$

$ZR^{(n,3)} = (2, 3, 0, 1)$

$ZR^{(n,4)} = (3, 2, 1, 0) \supset ZR^{p} = (3, 2, 1)$,

deren Konstruktionsschemata wie folgt sind:

$Zkl^{(n,1)} = (0.1\ 1.1\ 2.1\ 3.1)$

$Zkl^{(n,2)} = (1.1\ 0.1\ 3.1\ 2.1)$

$Zkl^{(n,3)} = (2.1\ 3.1\ 0.1\ 1.1)$

$Zkl^{(n,4)} = (3.1\ 2.1\ 1.1\ 0.1)$

Wie man erkennt, ist

$(Zkl^{(n,1)})° = Zkl^{(n,4)}$

$(Zkl^{(n,2)})° = Zkl^{(n,3)}$,

d.h. die allgemeine Struktur der 4 Typen sind:

$Zkl^{(n,1)} = (a, b, c, d)$

$Zkl^{(n,4)} = (d, c, b, a)$

$Zkl^{(n,2)} = (b, a, d, c)$

$Zkl^{(n,3)} = (c, d, a, b)$

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Conway, John Horton/Richard K. Guy, The Book of Numbers. New York 1996

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Zahlenreihen zwischen den Kontexturen

1. Ein Apfel und eine Birne ergibt in der quantiativen Mathematik bekanntlich zwei Früchte, also dasselbe wie eine Birne und eine Orange, eine Feige und eine Himbeere, usw. Solange es also einen gemeinsamen qualitativen Nenner der qualitativen Anzahlen gibt, die addiert werden sollen, wird die in einem rein quantiativen System nicht vorhandene Qualität eben auf die eine Qualität der Quantität, wie Hegel sagte, zurückgeführt. Was aber ergibt ein Apfel und eine Kartoffel? Wie man erkennt, langt auch die Sprache mit ihren Qualitäten, mit der man sich über das unmögliche Addieren von Qualitäten ein Stück weit hinausmogeln kann, nicht sehr weit. Was ergibt ein Zahnweg, eine Kirche und ein Krokodil (das bekannte Beispiel Günthers aus dem „Selbstbildnis“ von 1975)?

2. Daraus lernt man zwei Dinge: Erstens, es ist falsch, wenn Günther im gleichen, eben erwähnten Buchkapitel schreibt, alle kontexturellen Abysse seien prinzipiell gleich gross: Das Zeichen, das von seinem Objekt getrennt ist, die Dichotomie von Leben und Tod, der Abstand zwischen einem Ich und einem Du – und schliesslich das Urbild aller binären kontexturellen Relationen: die Transzendenz zwischen Gott und Mensch, das Sinnbild der Unerreichbarkeit, des kontexturellen Abbruchs. Wie ich hier zeige, kann man mit Hilfe von mediativen Kontexturenzahlen die verschiedenen kontexturellen Abstände in semiotischer Repräsentation wenigstens relativ unterscheiden. Zweitens: Wie bereits angetönt, ist das qualitative Repertoire der Umangssprache, die als Subsidium zur Veranschaulichung nicht-existenter qualitativer Additionen dient, viel zu schwach ausgeprägt. Wenn wir die oben gegebenen Beispiele systematisieren:

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel (rein quantitativ)

1 Apfel + 1 Birne = 1 Himbeere + 1 Feige + ... + = 2 Früchte (semantischer Behelfsterm im Sinne eines qualitativen kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen vorhanden)

1 Orange + 1 Zitrone = 2 Zitrusfrüchte (nur spezifischer semant. Behelfsterm als k.g.V. vorhanden)

1 Himbeere + 1 Heidelbeere = 2 Beeren (nur spezifischer semant. Behelfsterm vorhanden)

1 Bintje + 1 Urgenta = 2 Kartoffeln (nur überspezfischer semant. Behelfterm vorhanden)

Diese Form der „qualitativen Substitution“ nicht-vorhandener quantitativer Additionen enthält ferner eine grosse Anzahl von qualitativen Fehlern:

1 Erdbeere + 1 Himbeere = ? (die Erdbeere ist botanisch keine Frucht)

1 Kartoffel + 1 Süsskartoffel = ? (die Süsskartoffel ist keine Kartoffel)

Es gibt allerdings auch den umgekehrten Fall, wo der semantische Behelfsterm existiert, aber meistens in Unkenntnis nicht gesetzt wird:

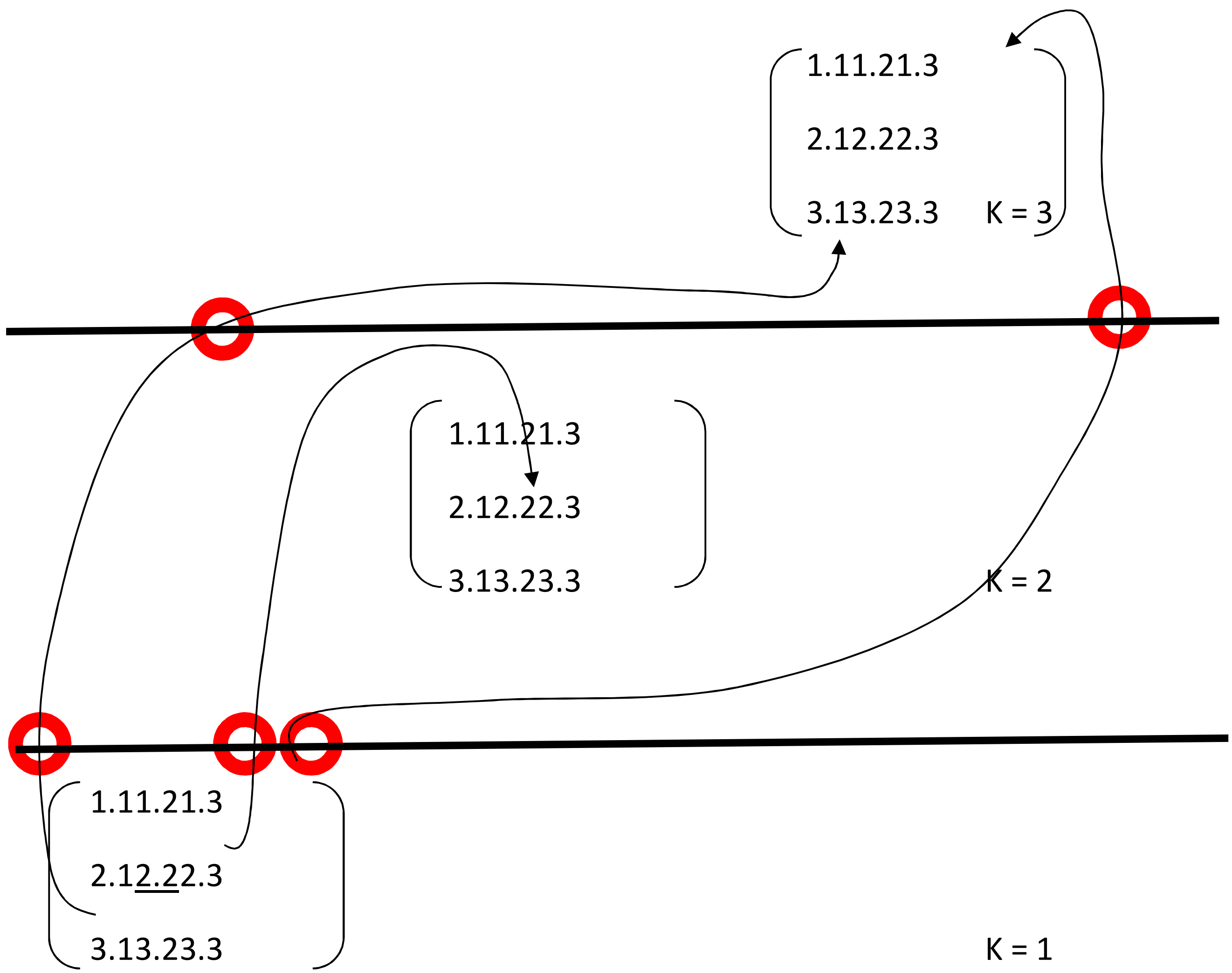
1 Sonnenblume + 1 Topinamburblume = 2 Sonnenblumen (vgl. die Bezeichnungen „essbare Sonnenblume“, ital. girasole articiocco)

Dieser kleine Ausschnitt aus linguistisch nie untersuchtem Gebiet lässt erahnen, dass auch die zugrunde liegenden qualitativ-mathematischen Verhältnisse alles andere als einfach sind.

2. Zur Illustration des Themas Kontexturen und Kontexturengrenzen gebe ich meine in Toth (2011a) veröffentlichte Darstellung der Transformation

$(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.1_3\ 2.2_{1.2}\ 1.3_3)$

mit den 5 involvierten Transgressionen wieder:



3. Im Anschluss an Toth (2011b) möchte ich jedoch die irreführende Peircesche Zeichenrelation

ZR = (M, O, I)

durch die Zeichenrelation

ZR = (O, M, I),

worin M wirklich zwischen O und I vermittelt, ersetzen. Ferner ordnen wir in Abweichung des von Kaehr (2008) geübten Verfahren jeder Fundamentalkategorie nicht zwei, sondern nur eine Kontextur zu, und zwar wie folgt:

$O \rightarrow O_1$

$M \rightarrow M_2$

$I \rightarrow I_3$

Die Kategorien partizipieren sind damit im Gegensatz zur üblichen Praktik ($M \rightarrow M_{1.3}$, $O = O_{1.2}$, $I \rightarrow I_{1.3}$) Vektoren linear unabhängig.

Damit bekommen wir folgende neue kontexturierte Matrix:

	2_1	1_2	3_3
2_1	2.2_1	$2.1_{1.2}$	$2.3_{1.3}$
1_2	$1.2_{2.1}$	1.1_2	$1.3_{2.3}$
3_3	$3.2_{3.1}$	$3.1_{3.2}$	3.3_3

also etwas vollkommen anderes als die entsprechende Matrix in Kaehr (2008). Zeichnen wir nun die Mediationen zwischen den triadischen, den trichotomischen und den diagonalen Peirce-Zahlen ein.

3.1. Kontexturelle Mediationszahlen von tdP:

	2_1		1_2		3_3
2_1	2.2_1		$2.1_{1.2}$		$2.3_{1.3}$
		$\coprod_{1.2}$		$\coprod_{1.2.3}$	
1_2	$1.2_{2.1}$		1.1_2		$1.3_{2.3}$
		$\coprod_{2.1}$		$\coprod_{2.1.3}$	
3_3	$3.2_{3.1}$		$3.1_{3.2}$		3.3_3
		$\coprod_{3.1.2}$		$\coprod_{2.1}$	

3.2. Kontexturelle Mediationszahlen von ttP:

	2_1	1_2	3_3
2_1	2.2_1	$2.1_{1.2}$	$2.3_{1.3}$
	$\coprod_{1.2}$	$\coprod_{1.2}$	$\coprod_{1.3.2}$
1_2	$1.2_{2.1}$	1.1_2	$1.3_{2.3}$
	$\coprod_{2.1.3}$	$\coprod_{1.2.3}$	$\coprod_{1.3.2}$
3_3	$3.2_{3.1}$	$3.1_{3.2}$	3.3_3

3.3. Kontexturelle Mediationszahlen von diagP:

	2_1		1_2		3_3
2_1	2.2_1		$2.1_{1.2}$		$2.3_{1.3}$
		$\coprod_{1.2}$		$\coprod_{1.3.2}$	
1_2	$1.2_{2.1}$		1.1_2		$1.3_{2.3}$
		$\coprod_{1.3.2}$		$\coprod_{1.2.3}$	
3_3	$3.2_{3.1}$		$3.1_{3.2}$		3.3_3

Stehe kMZ für kontexturelle Mediationszahl, dann gibt es also folgende Reihen in einer triadisch-trichotomischen Semiotik, untergliedert nach den Peirce-Zahlen (hdP = hauptdiagonale P., ndP = nebendiagonale P.):

kMZ(tdP) = {(1, 2), (1, 2, 3), (2.1), (2, 1, 3), (3, 1, 2), (2, 1)}

kMZ(ttP) = {(1, 2), (2, 1, 3), (1, 2), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 3, 2}

kMZ(hdP) = {(1, 2), (1, 2, 3)}

kMZ(ndP) = {(3, 1), (1, 3, 2)}

Mit diesen kontexturellen Mediationszahlen kann man nun die relativen Abstände zwischen zwei und mehr Kontexturen entweder in linearer oder in diagonaler Richtung bestimmen.

Bibliographie

Günther, Gotthard, Selbstbildnis im Spiegel Amerikas. In: Pongratz, Ludwig J., Philosophie in Selbstdarstellungen, Bd. 2. Hamburg 1975, S. 1-76

Toth, Alfred, Semiotische kontexturale Verbundsysteme. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011a

Toth, Alfred, Die semiotische Matrix als Mediationssystem. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011b

Die semiotische Matrix als Mediationssystem

1. Im Grunde ist es erstaunlich, dass die Definition des Peirceschen Zeichens in der Ordnung

ZR = (M, O, I)

oder in der konversen Ordnung

ZR° = (I, O, M)

erfolgt, denn es ist ja in beiden Fällen nicht das Objekt, das zwischen Mittel und Interpretant vermittelt, sondern diese Aufgabe fällt per definitionem M zu; man würde also erwarten

ZR_m = (O, M, I)

oder

ZR_m = (I, M, O),

vgl. auch van den Boom (1981). Daraus würde als Reihenfolge der triadischen (2. > 1. > 3./3. > 1. > 2.), trichotomischen (.2 > .1 > .3/.3 > .1 > .2) und diagonalen Peirce-Zahlen (2.2 > 1.1 > 3.3/3.3 > 1.1 > 2.2) folgen.

2. Nun entsprecht die Ordnung der Zeichenschmata ZR_m dem natürlichen Ablauf der Semiosen, insofern zuerst ein Objekt da ist, für das dann ein Mittel gewählt und ein Bedeutungskonnex etabliert wird. In der zweiten Definition wählt der primäre Interpretant sekundär ein Mittel für ein tertiäres Objekt. Da es sich hier um Fundamentalkategorien handelt, die in der klassischen Semiotik als Bausteine des Geistes nicht ineinander übergehen können (ebenso wie die Bausteine der Materie, die chemischen Elemente, nicht ineinander übergehen können). Wir können uns somit z.B. auf die Ordnung ZR_m = (O, M, I) festlegen und jeder Fundamentalkategorie eine separate Kontextur zuschreiben:

$O \rightarrow O_1$

$M \rightarrow M_2$

$I \rightarrow I_3$

Sie partizipieren damit im Gegensatz zu der üblichen Praktik ($M \rightarrow M_{1.3}$, $O = O_{1.2}$, $I \rightarrow I_{1.3}$) nicht an zwei Kontexturen, d.h. sie sind, da die Subzeichen als Vektoren in der als Vektorraum aufgefassten Matrix darstellbar sind, im Gegensatz zur Handhabung von Kaehr „linear unabhängig".

Damit bekommen wir:

	2_1	1_2	3_3
2_1	2.2_1	$2.1_{1.2}$	$2.3_{1.3}$
1_2	$1.2_{2.1}$	1.1_2	$1.3_{2.3}$
3_3	$3.2_{3.1}$	$3.1_{3.2}$	3.3_3

also etwas vollkommen anderes als die entsprechende Matrix in Kaehr (2008). Zeichnen wir nun die Mediationen zwischen den triadischen Peirce-Zahlen ein:

	2_1		1_2		3_3
2_1	2.2_1		$2.1_{1.2}$		$2.3_{1.3}$
		$\coprod_{1.2}$		$\coprod_{1.2.3}$	
1_2	$1.2_{2.1}$		1.1_2		$1.3_{2.3}$
		$\coprod_{2.1}$		$\coprod_{2.1.3}$	
3_3	$3.2_{3.1}$		$3.1_{3.2}$		3.3_3
		$\coprod_{3.1.2}$		$\coprod_{2.1}$	

So sind diejenigen zwischen triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen wegen $(a.b)_{\alpha.\beta} \ddagger (a.b)°_{\alpha.\beta} = (b.a)_{\beta.\alpha}$, d.h. Konversion wird wie Dualität behandelt. Vgl. die Mediationen zwischen den trichotomischen Peirce-Zahlen:

	2_1	1_2	3_3
2_1	2.2_1	$2.1_{1.2}$	$2.3_{1.3}$
	$\amalg_{1.2}$	$\amalg_{1.2}$	$\amalg_{1.3.2}$
1_2	$1.2_{2.1}$	1.1_2	$1.3_{2.3}$
	$\amalg_{2.1.3}$	$\amalg_{1.2.3}$	$\amalg_{1.3.2}$
3_3	$3.2_{3.1}$	$3.1_{3.2}$	3.3_3

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. In: http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf (2008)

van den Boom, Holger, Der Ursprung der Periceschen Zeichentheorie. In: Zs. für Semiotik 3, 1981, S. 23-39

Notiz zu Sema, Phema und Deloma

1. Nach Walther (1979, S. 96) hat Peirce neben der bekannten Trichotomie von Rhema, Dicent und Argument als Alternative die Interpretantentrichotomie Sema, Phema und Deloma vorgeschlagen. Er versteht unter „Sema“ ein einfaches Zeichen ohne Vorgänger und Nachfolger, unter „Phema“ ein aus Vorgänger und Nachfolger bestehendes Zeichen, und unter Deloma ein aus Vorgänger, Nachfolger und Nachfolgeprinzip bestehendes Zeichen.

2. Zur Erinnerung hatte Bense (1981, S. 26) den Zahlbegriff als triadische Relation wie folgt definiert:

ZaR = R(Za(kard), Za(ord), Za(rel)),

d.h. er weist die Kardinalzahl dem semiotischen Mittelbezug, die Ordinalzahl dem semiotischen Objektbezug und die „Relationszahl“ dem semiotischen Interpretantenbezug zu. Genauer versteht er unter Kardinalzahl „Repräsentation als Mächtigkeit“, unter Ordinalzahl „Repräsentation als Nachfolge“, und unter dem ad hoc eingeführten Relationalzahl-Begriff „Repräsentation als Konnex“. Obwohl man die Primordialität der Kardinal- vor den Ordinalzahlen vertreten dann (das hatte z.B. schon Baer 1932 getan), ist es fraglich, Ordinalität als Zweitheit zu fassen, da hierzu nicht nur Nachfolger, sondern auch Vorgänger und v.a. das Nachfolge-Prinzip, also die Peanosche Induktion, nöltig wären. Sie aber müssten – im Einklang mit Peirce´s Interpretation des Dilomas – dritt- und nicht zweitheitlich repräsentiert werden. Was die „Relationszahl“ und ihre Definition als „Konnex“ angeht, so bleibt weitgehend unklar, was Bense damit meint.

3. Man kann jedoch die Bensesche semiotischen Zahlenkonzeption mit Peirces alternativer Interpretantentrichotomie verbinden und wie folgt definieren:

(3.1) = Sema := Zahlzeichen (Ziffer)

(3.2) = Phema := Zeichenzahl (Zeichen als Zahl, vgl. Primzeichen, Peirce-Zahlen)

(3.3) = Deloma := Natürliche Zahlen (Peano-Induktion)

Zur Begründung: Die Ziffer ist nur der Strich, der die Zahl repräsentiert, aber selber natürlich keine Zahl, er fungiert also erstheitlich und damit als (3.1). Wie Bense des öftern demonstriert hat (vgl. 1975, S. 167 ff., 1983, S. 192 ff.), entspricht die Generation der Zeichen der Peano-Induktion der natürlichen Zahlen, mit dem Unterschied freilich, dass nach Peirce und Bense das Zeichen eine triadisch-trichotomische Relation ist, d.h., dass aus $\mathbb{N}$ in der Semiotik nur die Menge {1, 2, 3} benötigt wird, also eine Zahl (2) mit einem Vorgänger (1) sowie einem Nachfolger (3) – aber keinem Nachfolgeprinzip, das es erlauben würde, über die 3 und somit über die Triade hinauszugehen. Damit ist gezeigt, dass das Zeichen als Zahl zweitlich im Sinne von (3.2) fungiert. Von hier ist es kleiner Schritt: Vom kann entweder sagen: durch Hinzunahme der Peano-Induktion zu (3.2), d.h. der Zeichenzahl als Phema, macht man den Schritt von der Semiotik in die Mathematik, oder man kann sagen: durch Hinzunahme der Peano-Induktion zu (3.2) wird aus dem Zeichen-Phema ein Zeichen-Deloma und aus der triadische eine n-adische Zeichenrelation, die also nicht mehr auf der Limitation durch drei und nicht mehr Universalkategorien beschränkt ist.

Bibliographie

Baer, Reinhold, Hegel und die Mathematik. In: Verhandlungen des 2. Hegel-kongresses, Berlin 1931, hrsg. B. Wigersma. Berlin 1932, S. 104-120

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Ein Verfahren zur Erzeugung von nicht-abgeleiteten Realitätsthematiken

1. Obwohl ein Objekt durch Meta-Objektion in ein Zeichen transformiert (Bense 1967, S. 9) und anschliessend in der einer der 10 Peirceschen Zeichenklassen repräsentiert wird, aus denen erst anschliessend durch Dualisation 10 Realitätsthematiken gewonnen werden können, ist es nach Bense so, dass „das Präsentamen kategorial und realiter dem Repräsentamen voran[geht]. So auch die Realitätsthematik der Zeichenthematik; aber wir können den präsentamentischen Charater der Realitätsthematik erst aus dem repräsentamentischen Charakter ihrer Zeichenrelation ermitteln (1981, S. 11).

2. Was wir also suchen, kann durch folgendes kleine Modell illustriert werden:

$\Omega \rightarrow Rth \rightarrow Zkl$

anstatt der bei Peirce theoretisch induzierten Abfolge

$\Omega \rightarrow Zkl \rightarrow Rth.$

Rudolf Kaehr (2008) hat nun folgendes Verfahren zur Zuweisung von Kontexturenzahlen zu Subzeichen vorgeschlagen. Obwohl bei ihm bereits die Primzeichen kontexturiert werden, wird bei den Subzeichen nur der trichotomische Stellenwert, nicht aber der triadische Hauptwert kontexturiert (Kaehr 2008, S. 6):

$$cat^{(3)}\left(Sem^{(3,2)}\right) = \begin{pmatrix} MM & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 \longrightarrow 1_{1.3} & 1 \longrightarrow 2_{1} & 1 \longrightarrow 3_{3} \\ 2 & 2 \longrightarrow 1_{1} & 2 \longrightarrow 2_{1.2} & 2 \longrightarrow 3_{2} \\ 3 & 3 \longrightarrow 1_{3} & 3 \longrightarrow 2_{2} & 3 \longrightarrow 3_{2.3} \end{pmatrix}:$$

Obwohl das Endergbnis der kontexturierten kategorialen Matrix wie folgt ausschaut:

$$\mathrm{Sem}^{(3,2)} = \begin{array}{c|c} \mathrm{MM} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{1.1}_{\mathbf{1.3}} & \mathbf{1.2}_{\mathbf{1}} & \mathbf{1.3}_{\mathbf{3}} \\ \mathbf{2.1}_{\mathbf{1}} & \mathbf{2.2}_{\mathbf{1.2}} & \mathbf{2.3}_{\mathbf{2}} \\ \mathbf{3.1}_{\mathbf{3}} & \mathbf{3.2}_{\mathbf{2}} & \mathbf{3.3}_{\mathbf{2.3}} \end{array}\right) \end{array}$$

tragen nach dem Zuweisungsschema konverse Subzeichen gleiche Kontexturenzahlen, obwohl die ihnen zugehörigen Peirce-Zahlen verschieden sind, vgl.

$1 \rightarrow 2_1 = (1.2)_1$, aber

$2 \rightarrow 1_1 = (2.1)_1$

$1 \rightarrow 3_3 = (1.3)_3$, aber

$3 \rightarrow 1_3 = (1.3)_3$

$2 \rightarrow 3_2 = (2.3)_2$, aber

$3 \rightarrow 2_2 = (3.2)_2$

Somit gilt:

$2_1° = 1_1$

$3_3° = 1_3$

$3_2° = 2_2$.

3. Damit ist es also möglich, direkt Realitätsthematiken zu erzeugen, ohne sie also erst von Zeichen ableiten zu müssen:

1. 1.1 1.2 1.3 $\rightarrow$ $1_{.13}\ 2_1\ 3_3$

2. 2.1 1.2 1.3 $\rightarrow$ $1_1\ 2_1\ 3_3$

3. $3.1\ 1.2\ 1.3 \rightarrow 1_3\ 2_1\ 3_3$

4. $2.1\ 2.2\ 1.3 \rightarrow 1_1\ 2_{1.2}\ 3_3$

5. $3.1\ 2.2\ 1.3 \rightarrow 1_3\ 2_{1.2}\ 3_3$

6. $3.1\ 3.2\ 1.3 \rightarrow 1_3\ 2_2\ 3_3$

7. $2.1\ 2.2\ 2.3 \rightarrow 1_1\ 2_{1.2}\ 3_2$

8. $3.1\ 2.2\ 2.3 \rightarrow 1_3\ 2_{1.2}\ 3_2$

9. $3.1\ 3.2\ 2.3 \rightarrow 1_3\ 2_2\ 3_2$

10. $3.1\ 3.2\ 3.3 \rightarrow 1_3\ 2_2\ 3_{2.3}$

Dualisiert man nun diese Realitätsthematiken, so erhält man Strukturen, welche in der Peirceschen Semiotik als Realitätsthematiken bezeichnet werden, mit dem Unterschied, dass die zusammengesetzten Kontexturenzahlen nicht konvertiert werden, denn es gibt ja keine zusammengesetzten Kontexturenzahlen, welche in der Konversion erhalten bleiben, z.B.

1. $\times(1.1\ 1.2\ 1.3 \rightarrow 1_{.13}\ 2_1\ 3_3) = (3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow 1_3\ 1_1\ 1_{1.3}$

2. $\times(2.1\ 1.2\ 1.3 \rightarrow 1_1\ 2_1\ 3_3) = (3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow 1_3\ 1_1\ 2_1$

3. $\times(3.1\ 1.2\ 1.3 \rightarrow 1_3\ 2_1\ 3_3) = (3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow 1_3\ 1_1\ 3_3$, usw.

Man erhält so also strukturelle Realitäten (Thematisationen)

$1_3\ \underline{1_1\ 1_{1.3}}$ M-them. M

$1_3\ \underline{1_1\ 2_1}$ M-them. O

$1_3\ \underline{1_1\ 3_3}$ M-them. I

wie in der Peirceschen Semiotik, nur dass es sich hier eben im Grunde um Zeichenklassen handelt. Die Beibehaltung der Ordnung der Kontexturenzahlen

$(3.1\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1_3\ 2_{1.2}\ 3_3) \times (1_3\ 2_{1.2}\ 3_3)$

führt nach dieser Methode allerdings dazu, dass die Eigenrealität bestehen bleibt und mit ihr die drei Grundgesetze des Denkens, also auch das Prinzip der Identität, wodurch man genötigt wäre, diesen kontexturierten Repräsentationssystemen die Polykontexturalität, die aber doch gerade durch die Kontexturenzahlen eingeführt worden waren, abzusprechen.

Unsere hier angewandte Methode liefert also zweierlei: 1. die direkte Erzeugung von Realitätsthematiken, ohne sie „ad hoc" aus Zeichenklassen (deren Nutzen dadurch fraglich wird) ableiten zu müssen, und 2. die Etablierung eines Systems einer kontexturierten Semiotik untere Beibehaltung der Eigenrealität, die ja spätestens seit Bense (1992) das Herz der Semiotik darstellt und bei deren Aufhebung der ganze Systemcharakter der Semiotik zusammenfällt.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds (2008). In: http://works.bepress.com/cgi/viewcontent.cgi?article=1000&context=thinkartlab , S. 44 ff.

Fragen nach der Zuweisung von Kontexturenzahlen zu semiotischen Relationen

1. Kaehr (2008) geht davon aus, dass den semiotischen Fundamentalkategorien, d.h. den 1-stelligen semiotischen Relationen, Kontexturenzahlen zugewiesen werden. Damit kann also nicht erst ein Zeichen in einer Kontextur liegen, sondern bereits seine elementaren relationalen Bestandteile.

Das Vorgehen ist wie folgt: Eine n-adische Relation für $n \geq 3$ wird in k (n-1)-adische dekomponiert. Nun hat eine n-stellige Relation $\binom{n}{k}$ k-stellige Partialrelationen (vgl. Menne 1991, S. 152). Somit enthält eine 3-stellige Relation 3 2-stellige, eine 4-stellige 4 3-stellige, eine 5-stellige 5 4-stellige, allgemein eine n-adische Relation (n-1)adische (n-1)-adische Partialrelationen, also genau so viele, wie die Anzahl der Einträge der entsprechenden quadratischen Matrix ($n \times n$) beträgt. Somit hat also eine n-adische Relation immer höchstens (n-1)-stellige Kontexturenzahlen.

2. Diese Kontexturenzahlen, z.B. (1, 2), (2, 3), (1, 3) für eine 3-adische Semiotik, werden nun den 3 Fundamentalkategorien zugewiesen:

$(.1.)_{1.3}$, $(.2.)_{1.2}$, $(.3.)_{2.3}$

Hier stellt sich aber eine erste Frage: Wie oben festgestellt, liegen nach diesem Verfahren nicht erst die Zeichen, sondern bereits ihre Kategorien in Kontexturen. Nun liegen sie aber sogar je in 2 Kontexturen. Somit muss jede Kategorie verdoppelt, sozusagen als ihr eigener Zwilling oder Doppelgänger, auftreten. Ferner liegt zwischen jeder doppelt auftretenden Kategorie noch eine Kontexturgrenze, die dann aber per definitionem zur Kategorie selbst gehört!

Eine zweite Frage lautet: (.a.) ist nichts anderes als eine Portemanteau-Notation für zwei verschiedene Dinge. 1. für triadische Peirce-Zahlen der Form (a.), 2. für trichotomische Peirce-Zahlen der Form (.a). Nun erhalten aber beide Peirce-Zahlen dieselben Kontexturen, obwohl (a.) rechts- und (.a) linksbindend ist. Daraus folgt dann, dass konverse Subzeichen (wenigstens solange sie in der gleichen Matrix liegen) identische Kontexturenzahlen haben (z.B. $(1.3)_3$ und $(3.1)_3$). Zwei Probleme tauchen hier also auf: 1. Falls zwischen zwei triadischen Peirce-Zahlen eine Kontexturgrenze verläuft (1. ‖ 2., 2. ‖ 3. und 1. ‖ 3.), verläuft dann die gleiche

Kontexturgrenze zwischen (1. ‖ .2, 2. ‖ .3 und 1. ‖ .3)? Falls es so ist, dann muss aber allgemein zwischen a. und .a die gleiche Kontexturgrenze verlaufen (a. ‖ .a). Dann aber können die Fundamentalkategorien (.1.), (.2.), (.3.) nicht in zwei verschiedenen Kontexturen liegen ($(.1.)_{1.3}$, $(.2.)_{1.2}$, $(.3.)_{2.3}$)! 2. Für die zueinander konversen Subzeichen spielt nach diesem Verfahren die Reihenfolge der Kontexturen keine Rolle, da ja [$(a.b)_{\alpha\beta} = (a.b)° °_{\gamma\delta} \rightarrow \alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$]. Falls man aber umgekehrt [$(a.b)_{\alpha\beta} = (a.b)° °_{\gamma\delta} \rightarrow \alpha = \delta$ und $\beta = \gamma$] setzte, müsste im Falle von z.B. $(.1.)_{1.3}$: $(1.)_1$ und $(.1)_3$ sein, und d.h. die Kontexturgrenzen zwischen triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen wären verschieden. Sie würden sich in diesem Falle also gleich verhalten wie wenn sie in zwei verschiedenen Matrizen liegen, denn in diesem Fall gilt ja: [$(a.b)_{\alpha\beta} = \times\times(a.b)°_{\gamma\delta} \rightarrow \alpha = \delta$ und $\beta = \gamma$]. Da dies nach der geübten Methode aber nicht der Fall ist, stellt sich sozusagen nebenbei die weitere Frage, warum denn Dualisation die Kontexturenzahlen umkehrt, Konversion aber nicht.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Interactional operators in diamond semiotics. ThinkartLab 2008

Zwischenzahlen zwischen diagonalen Peirce-Zahlen

1. In früheren Arbeiten wurde auf Grund der je veerschiedenen Ordnungen zwischen drei Arten von Peirce-Zahlen unterscheiden:

1. triadische Peircezahlen (tdP): a.1, b.2, c.3 mit a, b, c $\in$ {1, 2, 3}

Bedingungen: 1. Limitationsordnung a < b < c. 2. Paarweise Verschiedenheit.

2. trichotomische Peirce-Zahlen (ttP): 1.a, 2.b, 3.c mit a, b, c $\in$ {1, 2, 3}

Bedingungen: 1. Limitationsordnung a ≤ b ≤ c. 2. Paarweise Verschiedenheit.

3. diagonale Peirce-Zahlen (dgP): a.a, b.b, c.c mit a, b, c $\in$ {1, 2, 3} 2. Paarweise

verschieden.

2. Während in der Mathematik bekanntlich gilt, d.h. zwischen zwei komplexen Zahlen immer nochmals eine komplexe Zahl steht, so gilt dies in der Semiotik wenigstens dann nicht, wenn man sich jede Peirce-Zahl in einer Kontextur denkt:

2.1. Beispiel für tdP:

$1.1_{1.3}$ 1.2_{1} 1.3_{3}

$1.1.1_{1.3}$ $1.2.2_{1.3}$

$1.1.2_{1.3}$ $1.2.3_{1.3}$

$1.1.2.2_{1.3}$

$1.1.2.3_{1.3}$, usw.

Gesetzt also den Fall, man geht von dyadischen Subzeichen zu triadischen, tetradischen, pentadischen ... über, sie befinden sich stets in der gleichen Kontextur wie die nächsten vorangehenden und nachfolgenden Subzeichen, zwischen denen sie stehen.

2.2. Beispiel für ttP:

$1.1_{1.3}$ $\quad$ 2.1_{1} $\quad$ 3.1_{3}

$1.1.1_{1.3}$ $\quad$ $2.1.1_{1.3}$

$2.1.2_{1.3}$ $\quad$ $3.1.1_{1.3}$

$2.1.2.2_{1.3}$

$2.1.2.3_{1.3}$, usw.

„Transzendente“ Peirce-Zahlen findet man also nur dort, wo verschiedene Kontextur aufeinander kommen. Kaehr (2008, S. 4) hat dies sehr richtig vorausgesehen, wenn er die kontexturierte triadische Matrix

$$\begin{pmatrix} 1.1_{1.3} & 1.2_{1} & 1.3_{3} \\ 2.1_{1} & 2.2_{1.2} & 2.3_{2} \\ 3.1_{3} & 3.2_{2} & 3.3_{2.3} \end{pmatrix}$$

nicht etwa durch Peano-Fortsetzung in die entsprechende tetradische Matrix einbettete, sondern dadurch, dass die die kategoriale Vierheit repräsentierenden Peircezahlen zwischen $(1.2)_{1}$ und $(1.3)_{3}$ einerseits und zwischen $(2.1)_{1}$ und $(3.1)_{3}$ als Zeile und Spalte zu stehen kommt:

4 – contextual semiotic matrix

$$Sem^{(4,2,3)} = \begin{array}{cc} \text{MM} & \begin{array}{cccc} \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad & \quad 4 \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1.1_{1.3.4} & 1.2_{1} & 1.3_{1.4} & 1.4_{3.4} \\ 2.1_{1} & 2.2_{1.2.3} & 2.3_{2} & 2.4_{2.3} \\ 3.1_{1.4} & 3.2_{2} & 3.3_{1.2.4} & 3.4_{2.4} \\ 4.1_{3.4} & 4.2_{3.2} & 4.3_{2.4} & 4.4_{2.3.4} \end{pmatrix} \end{array}$$

Man bemerkte, dass der für K = 3 gilt: $(2.2)_{1.2}$, aber für K 4: $(2.2)_{1.2.3}$ und nicht durch Peano-Addition einer weiteren Kontextur: $(2.2)_{1.2.4}$ (vgl. $(1.1)_{1.3} \rightarrow (1.1)_{1.3.4}$, usw.)!

3. Allerdings gibt es zwischen je zwei diagonalen Peirce-Zahlen sehr wohl je eine weitere diagonale Peirce-Zahl:

$1.1_{1.3}$ $\quad$ $2.2_{1.2}$ $\quad$ $3.3_{2.3}$

$1.1.1_{1.3.2}$ $\quad$ $2.2.2_{1.2.3}$,

wobei also $<1.3.2> \neq <1.2.3>$ ist. Weiter geht es aber auch hier nicht mehr.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Interactional operators in diamond semiotics. In: http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Transjunctional%20Semiotics/Transjunctional%20Semiotics.pdf (2008)

Semiotische Matrizen aus Kehrwerten

1. Die triadische Semiotik ist ein ein qualitativ-quantiatives Zahlensystem, das entsprechend der drei möglichen Austauschrelationen

1 ↔ 2

2 ↔ 3

1 ↔ 3

auch drei Inverse und d.h. drei verschiedene Kehrwerte (Reziproke) besitzt. Somit ist einer Peirce-Zahl ihr Kehrwert nicht eindeutig zugeordnet, sondern jede Peirce-Zahl kennt drei Kehrwerte. Darüber gibt die folgende Tabelle Aufschluss:

Peirce-Zahl	1 ↔2	2 ↔ 3	1 ↔ 3
1.2	2.1	1.3	3.2
1.3	2.3	1.2	3.1
2.1	1.2	3.1	2.3
2.3	1.3	3.2	2.1
3.1	3.2	2.1	1.3
3.2	3.1	2.3	1.2

2. Nun dient als Grundlage der Semiotik bekanntlich die kleine Matrix

1.1	1.2	1.3
2.1	2.2	2.3
3.1	3.2	3.3,

aus der z.B. die Hauptzeichenklassen und Hauptrealitätsthematiken heausgelesen werden können (die Spalten 3.1 2.1 1.1 / 3.2 2.2 1.2 / 3.3 2.3 1.3 bzw. die Zeilen 1.1 1.2 1.3 / 2.1 2.2 2.3 / 3.1 3.2 3.3). Ersetzt man nun die nicht-genuinen Subzeichen gemäss der obigen drei Mengen von Austauschrelationen, so erhält man

1.1	2.1	2.3		1.1	1.3	1.2		1.1	3.2	3.1
1.2	2.2	1.3		3.1	2.2	3.2		2.3	2.2	2.1
3.2	3.1	3.3		2.1	2.3	3.3		1.3	1.2	3.3 .

Wie man auf den ersten Blick sieht, sind hier zwar die metrischen Topologien qua konstanter (genuiner) Hauptdiagonale durchwegs bewahrt, aber nicht die Abstände zwischen den Paaren von subsequenten/subantezendenten triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen; z.B.

Δ (1.1, 1.2) ≠

Δ (1.1, 2.1) ≠ Δ (1.1, 1.3) ≠ Δ (1.1, 3.2)

Δ (1.1, 2.1) ≠

Δ (1.1, 1.2) ≠ Δ (1.1, 3.1) ≠ Δ (1.1, 2.3) .

Es ist somit möglich, auf der Basis der „Kehrwertmatrizen“ neue semiotische Topologien zu induzieren.

Bibliographie

Toth, Alfred, Das Multireziprozitätssystem der Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Das Multireziprozitätssystem der Semiotik

1. Im Bereich der quantitativen Mathematik ist als Kehrwert einer Zahl n die Zahl n^{-1} = 1/n eindeutig zugeordnet (nur die 0 hat keinen Kehrwert).

2. Nun kennt aber die triadische Semiotik als quantitativ-qualitatives mathematisches System nicht nur ein Einselement und nicht nur ein Nullelement, sondern entsprechend der drei möglichen Austauschrelationen

$1 \leftrightarrow 2$

$2 \leftrightarrow 3$

$1 \leftrightarrow 3$

auch drei Inverse und d.h. drei verschiedene Kehrwerte (Reziproke). Somit ist einer Peirce-Zahl ihr Kehrwert nicht eindeutig zugeordnet, sondern jede Peirce-Zahl kennt drei Kehrwerte. Darüber gibt die folgende Tabelle Aufschluss:

Peirce-Zahl	$1 \leftrightarrow 2$	$2 \leftrightarrow 3$	$1 \leftrightarrow 3$
1.2	2.1	1.3	3.2
1.3	2.3	1.2	3.1
2.1	1.2	3.1	2.3
2.3	1.3	3.2	2.1
3.1	3.2	2.1	1.3
3.2	3.1	2.3	1.2

3. Da die drei Ausauschrelationen semiotische „Negationen“ sind (vgl. Günther 1957), sind jeweils die in einer Kolonne angeordneten Peirce-Zahlen kolonnenweise durch Kontrexturgrenzen voneinander getrennt. Das bedeutet aber, dass die sich in einer Zeile befindlichen Peirce-Zahlen gerade die Menge derjenigen Peirce-Zahlen bilden, die einander in den drei semiotischen Kontexturen reziprok sind. So ist also z.B.

$RECP(3.2)_1 = (2.3)_1 = (2.1)_2 = (1.3)_3$.

Bibliographie

Toth, Alfred, Zu einer semiotischen Arithmetik der Reziprozität I. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Reziprozitaet.pdf

Toth, Alfred, Zu einer semiotischen Arithmetik der Reziprozität II . In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Zu einer semiotischen Arithmetik der Reziprozität

S Lebe n isch es Lied, wo n en Spiler singt. Niemert verstoots, und scho is es verbii.

Kurt Früh, „Hinter den sieben Gleisen“ (1959)

1. In einer 2-dimensionalen Semiotik wie derjenigen von Peirce gibt es nur 2 Typen von Primzeichen:

1.1. Die triadischen, welche nach rechts binden: a.

D.h. es ist: A. = {a.x | a ∈ {1, 2, 3}.

1.2. Die trichotomischen, welche nach links binden: .a

D.h. es ist: .A = {x.a | a ∈ {1, 2, 3}.

Die Elemente von A. und .A können zu folgenden 4 Verbindungen kombiniert werden:

- a.a. - a..a

- .a.a - .aa.,

wobei also der Fall a..a = a.a, die sog. kartesische Multiplikation, nur einen Sonderfall unter mehreren einnimmt.

2. Gehen wie jedoch von einer 3-dimensionalen Semiotik aus (vgl. Stiebing 1978, S. 77), so finden wir die folgenden 6 Typen von Primzeichen:

2.1. Horizontal triadische: a.

x.x

D.h. es ist: .A = { x.a | a ∈ {1, 2, 3}.

x.x

2.2. Horizontal trichotomische: .a

x.x

D.h. es ist: .A = {   a.x |a ∈ {1, 2, 3}.

x.x

2.3. Vertikal triadische: ȧ

a.x

D.h. es ist: .A = {   x.x |a ∈ {1, 2, 3}.

x.x

2.4. Vertikal trichotomische: ạ

x.a

D.h. es ist: .A = {   x.x |a ∈ {1, 2, 3}.

x.x

2.5. Hinten/vorne triadische: à

x.x

D.h. es ist: .A = {   x.a |a ∈ {1, 2, 3}.

a.x

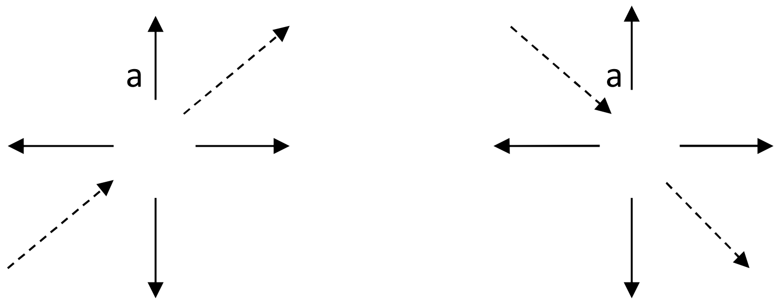
2.6. inten/vorne trichotomische: á.

x.x

D.h. es ist: .A = {   x.a |a ∈ {1, 2, 3}.

x.a

Ein Primzeichen der allgemeinen Form (a) hat also die folgenden (dimensionalen) Richtungen:



Diese 6 Typen lassen sich zu (6 · 7)/2 = 21 Paaren kombinieren, die in folgender Tabelle zusammengefasst sind:

a.a.

a..a .a.a

a.ȧ .aȧ ȧ ȧ

a.ạ .aạ ȧạ ạạ

a.à .aà ȧà ạà àà

a. á .aá ȧá ạá àá áá,

die Punkte und Striche sind also einfach Abkürzungen für Pfeile.

3. Eine Arithmetik gerichteter Peirce-Zahlen (worunter wir im Anschluss an Toth 2008 usw. die hier als triadische bzw. trichotomische oder rechts- und links-bindende bezeichneten Primzeichen verstehen) wird nun am besten mit Hilfe einer Topologie dargestellt, deren Basisbegriffe das Ganze und sein Teil sind (sog. Mereotopologie), denn sowohl bei reziproken wie bei reflexiven Handlungen sind ja immer mindestens zwei Objekte beteiligt: sie küssen sich, man isst von etwas, er erinnert sich an/auf/von etwas (z.B. deutsch/österr. Deutsch, Ungarisch/ Altgriechisch), Hunde schlecken sich ab, einer klebt ein Plakat an, der soldt zieht seine Uniform an, usw. Wer sich für die verbale Semiotik reziproker Ausdrücke interessiert, sei auf die Pionierarbeiten von Maslova 2000 u. 2005 verwiesen. Allerdings geht es hier im folgenden nicht um die verbale Kodierung reziproker Ausdrücke (z.B. Akkad. ah̳u ana ah̳i „einer dem anderen“, dt. ein-ander vs.

selbstdritt, finn. toinen toistaan (eig. „zweitens aus zweien) usw. usw.), sondern um die von der Linguistik unabhängigen, aber ihr zugrunde liegenden abstrakten Typen, d.h. um die mengentheoretisch-topologischen Strukturen, die den Typen von Reziprozität einschliesslich ihres Grenzfalls, der Reflexivität (vgl. dt. „sie küssen einander“ vs. „sie küssen sich“), zugrunde liegen.

3.1. Wir gehen also davon aus, dass man reziproke Handlungen relations-theoretisch sehr einfach wie folgt darstellen kann:

REC(x, y) := [(x, y) $\wedge$ (y, x)].

D.h., zwei Objekte sind nur dann reziprok, wenn sie auf beide Paare (x,y) und (y, x) zutreffen, sonst nicht. Ist x = y, liegt der Grenzfall der Reflexivität vor.

3.2. Als nächstes bestimmen wir die Lage der Objekte x und y zueinander (die Zunge x schleckt am Gesicht y, die Uniform x befindet sich am Körper y, Hans (x) schlägt Fritz (y), zwei Freunde, x und y, schreiben einander Briefe, usw. Ein einfaches Klassifkationsschema für Pars-Teil-Relationen wurde von Cohn und Varzi (2003, S. 7) vorgeschlagen:

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{O}_\tau(x, y) & =_{\mathrm{df}} & \exists z(\mathrm{P}_\tau(z, x) \wedge \mathrm{P}_\tau(z, y)) & x\ \tau\text{-overlaps } y \\
\mathrm{A}_\tau(x, y) & =_{\mathrm{df}} & \mathrm{C}_\tau(x, y) \wedge \neg \mathrm{O}_\tau(x, y) & x\ \tau\text{-abuts } y \\
\mathrm{E}_\tau(x, y) & =_{\mathrm{df}} & \mathrm{P}_\tau(x, y) \wedge \mathrm{P}_\tau(y, x) & x\ \tau\text{-equals } y \\
\mathrm{PP}_\tau(x, y) & =_{\mathrm{df}} & \mathrm{P}_\tau(x, y) \wedge \neg \mathrm{P}_\tau(y, x) & x \text{ is a proper } \tau\text{-part of } y \\
\mathrm{TP}_\tau(x, y) & =_{\mathrm{df}} & \mathrm{P}_\tau(x, y) \wedge \exists z(\mathrm{A}_\tau(z, x) \wedge \mathrm{A}_\tau(z, y)) & x \text{ is a tangential } \tau\text{-part of } y
\end{array}
$$

Man beachte dass mereotopologische „Equality“ genau der obigen Definition von „Reziprozität“ entspricht und dass das Nichterfülltsein dieser Relation genau mit der mereotopologischen Definition von „Proper Part“ (echter Teilmenge) zusammenfällt. Tangentialität kann man Grenzfall von „inverser“ Transitivität von Reziprozität bestimmen ((z, x) $\wedge$ (x, y) $\Rightarrow$ (z, y)).

Man kann nun in die obigen 5 Formeln für x und y jeweils alle 21 Paare gerichteter Peirce—Zahlen einsetzen, wobei natürlich diejenigen mit inverser Gerichtetheit ((a→←a)) entfallen.

Der arithmetische Diamant als Modell für Peirce-Zahlen

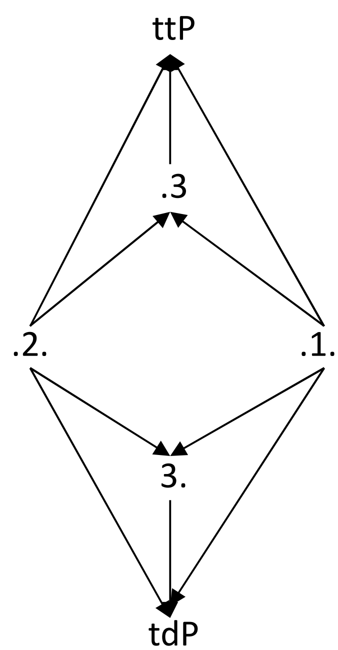
Wie in u.a. in Toth (2009) dargestellt habe, können die Primzeichen in die zwei diskreten Mengen der triadischen

tdP = (1., 2., 3.)

und der trichotomischen

ttP = (.1, .2, .3)

Peirce-Zahlen eingeteilt werden. Zu deren klarer Scheidung – und Zuweisung der tdP zu einer Kategorie, der ttP aber zu einer Saltatorie – lässt sich nun das Modell des arithmetischen Diamanten heranziehen, das Kaehr (2009, S. 72) vorgestellt hatte:



Wie man leicht erkennt, ist dieses Modell besonders dafür geeignet, die Realitätsthematiken als von ihren zugehörigen Zeichenklassen gesondert zu behandeln.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2009 (2007)

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf (2009)

Konverse und duale kontexturierte Subzeichen

1. In monokontexturalen Semiotiken fallen konverse und duale Subzeichen zusammen:

$(a.b)^{o} = \times(a.b) = (b.a)$,

z.B. $(2.1)^{o} = \times(2.1) = (1.2)$.

2. Kaehr (2009) hatte bereits darauf aufmerksam gemacht, dass dieser Zusammenfall nicht für kontexturierte Subzeichen gilt, wenigstens nicht für solche der Kontexturen $K \geq 2$:

$(2.2)_{1.2}{}^{o} \neq \times(2.2)_{1.2} = (2.2)_{2.1}$.

3. Schauen wir uns nun aber die Subzeichen selber als kartesische Produkte aus Primzeichen, an. Wegen $(a.a)_{\alpha.\beta}{}^{o} \neq \times(a.a)_{\beta.\alpha}$ benötigen wir hierzu eine Matrix der Zeichenklassen und eine (transponierte) Matrix der Realitätsthematiken:

	$.1_{1.3.4}$	$.2_{1.2.4}$	$.3_{2.3.4}$
$1._{1.3.4}$		$1.2_{1.4}$	
$2._{1.2.4}$	$2.1_{1.4}$		
$3._{2.3.4}$			

	$.1_{4.3.1}$	$.2_{4.2.1}$	$.3_{4.3.2}$
$1._{4.3.1}$		$1.2_{4.1}$	
$2._{4.2.1}$	$2.1_{4.1}$		
$3._{4.3.2}$			

(Entsprechend für 1.3/3.1 und 2.3/3.2.) Obwohl nun die Subzeichen selbst nichts Neues zu bringen scheinen, haben wir

$(1.2)_{1.4} = (1._{1.3.4}, .2_{1.2.4}) \neq (2._{1.2.4}, .1_{1.3.4}) = (2.1)_{1.4}$,

und allgemein für alle Subzeichen (a.b) mit $a. \neq .b$:

$(a.b)_{\alpha.\beta} = (a._{\alpha.\beta.\gamma}, .b_{\alpha.\delta.\gamma}) \neq (b._{\alpha.\delta.\gamma}, .a_{\alpha.\beta.\gamma}) = (b.a)_{\alpha.\gamma}$.

Bei kontexturierten Subzeichen ist also streng zwischen triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen (Primzeichen) zu unterscheiden.

Bibliographie

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf (2009)

Peirce-Zahlen und Morphismen

1. Wie üblich (vgl. z.B. Toth 2008), unterscheiden wir zwischen triadischen (tdP) und ntrichotomischen Peirce-Zahklen (ttP):

tdP = {1., 2., 3.}

ttP = {.1, .2, .3}

Damit haben wir also

tdP × ttP = ZR = {.1., .2., .3.}.

2. Nun ist (vgl. z.B. Toth 1993, S. 21 ff.):

α := 1. → 2. = 1.2

β := 2. → 3 = 2.3

$\beta\alpha$ = 1. → 3. = 1.3

Allerdings sind Subzeichen der Form (a.b) nur ein Spezialfall unter 4:

a.b

.ab

ab.

a..b,

wobei a.b ≠ a..b, denn a..b = J(a, b), also die Juxtaposition der Primzeichen a und b, während a.b das kartesische Produkt aus a. und .b ist und die ersten drei Fälle als Kompositionen bezeichnet werden können.

3. Mit Hilfe der „klassischen" semiotischen Kategorientheorie können wir also streng genommen nicht einmal kartesische Produkte bilden, denn

a × b = a. × .b ≠ a. × b. ≠ .a × .b.

Was wir ebenfalls nicht entscheiden können, ist, ob auch

$.a \rightarrow .b := \alpha$

gilt und wir somit eine Doppeldeutigkeit

$$\alpha := \begin{cases} (a. \rightarrow b.) \\ \\ (.a \rightarrow .b) \end{cases}$$

haben (oder ob gar (a. → b.) falsch ist).

4. Definieren wir mit Freyd und Scedrov (1989, S. 3):

□x := dom(x)

y□ := codom(y)

xy := Komposition von x und y

xy gdw x□ = □y,

dann haben wir also die folgenden morphismischen Entsprechung der Kompositionen semiotischer Objekte:

1.1 = x□y

.11 = □xy

11. = xy□□

1..1 = x□□y,

wobei der letzte Fall (1..1) bereits als Juxaposition, die übrigen Fälle dagegen als echte kategorientheoretische Kompositionen behandelt wurden.

4.1. Fall (1.1)

Auch dieser Fall ist Doppeldeutig, denn es kann sich in Benses Terminologie um

(1) die Semiose (1 → 1) oder (2) um die Retrosemiose (1 ← 1) handeln. Im ersten Fall liegt mit Kaehr ein Morphismus, im zweiten Fall ein Heeeromorphismus vor:

$(1.1) =: (1. \rightarrow .1) = id_{\rho\lambda}$ $(= id^{\rightarrow})$

$(1.1) =: (1. \leftarrow .1) = id_{\lambda\rho}$ $(= id^{\leftarrow})$

4.2. Fall (.11)

$(.11) = (.1 \rightarrow .1) = (.1 \leftarrow .1) = id_{\lambda\lambda}$

4.3. Fall (11.)

$(11.) = (1. \rightarrow 1.) = (1. \leftarrow 1.) = id_{\rho\rho}$

Bibliographie

Frey, Peter/Scedrov, Andre, Categories, Allegories. New York 1989

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf (2008)

Spuren, Keime und Zustandsmengen

1. Die Coalgebra, einer der jüngsten Disziplinen der Mathematik (und eine der wenigen, die nicht aus der Mathematik selbst entstanden sind) ist basiert auf einer Menge von Zuständen („states“), die auf Strukturen abgebildet werden.

2.1. Transformation der trichotomischen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix I:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \square & 1.1 & \square & 1.2 & \square & 1.3 \\ \square & 2.1 & \square & 2.2 & \square & 2.3 \\ \square & 3.1 & \square & 3.2 & \square & 3.3 \end{pmatrix}$$

2.2. Transformation der triadischen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix II:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ \square & \square & \square \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ \square & \square & \square \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

2.3. Transformation der diagonalen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix III:

$$\begin{pmatrix} & \square & & \square & & \square \\ \square & 1.1 & \square & 1.2 & \square & 1.3 \\ & \square & & \square & & \square \\ \square & 2.1 & \square & 2.2 & \square & 2.3 \\ & \square & & \square & & \square \\ \square & 3.1 & \square & 3.2 & \square & 3.3 \end{pmatrix}$$

3.1. Bedeute wie üblich Sp(ur), Ke(im), Cat(egorie), und seien wie üblich

$Sp = (x \in X, \rightarrow)$

$Ke = (y \in Y, \rightarrow)$

$Cat = (x \in X, y \in Y, \rightarrow)$

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} 1. \times 0.1 = 1_1 & 2. \times 0.1 = 2_1 & 3. \times 0.1 = 3_1 \\ 2. \times 0.2 = 1_2 & 2. \times 0.2 = 2_2 & 3. \times 0.2 = 3_2 \\ 3. \times 0.3 = 1_3 & 2. \times 0.3 = 2_3 & 3. \times 0.3 = 3_3 \end{array}\right\} \text{Spuren}$$

$$\left.\begin{array}{lll} .1 \times 0.1 = {}_1 1 & .2 \times 0.1 = {}_2 1 & .3 \times 0.1 = {}_3 1 \\ .2 \times 0.2 = {}_1 2 & .2 \times 0.2 = {}_2 2 & .3 \times 0.2 = {}_3 2 \\ .3 \times 0.3 = {}_1 3 & .2 \times 0.3 = {}_2 3 & .3 \times 0.3 = {}_3 3 \end{array}\right\} \text{Keime}$$

Kategorien entstehen also durch Zusammensetzung von Spuren und Keimen bzw. umgekehrt:

$Cat = (x_{\rightarrow}$ □□ $_{y}\rightarrow) = (x \rightarrow y), x \in X, y \in Y.$

3.2. Es ist

$\times(Sp) = Ke; \times(Ke) = Sp.$

Damit erhalten wir zwei 2-elementige Mengen:

$Sp = \{1_1; 1^1\}$

$Ke = \{{}_{1}1; {}^{1}1\},$

Wir haben dann also

$1_1 \circ {}_{1}1 = (1.1)$

$1_1 \circ 1_1 = (1.1.)$

${}_{1}1 \circ 1_1 = (.11.)$

${}_{1}1 \circ {}_{1}1 = (.1.1).$

und somit zwei homogene Matrizen für Spuren

$$\begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & 1_3 \\ 2_1 & 2_2 & 2_3 \\ 3_1 & 3_2 & 3_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1^1 & 1^2 & 1^3 \\ 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 3^1 & 3^2 & 3^3 \end{pmatrix}$$

und zwei homogene Matrizen für Keime

$$\begin{pmatrix} {}_{1}1 & {}_{2}1 & {}_{3}1 \\ {}_{1}2 & {}_{2}2 & {}_{3}2 \\ {}_{1}3 & {}_{2}3 & {}_{3}3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} {}^{1}1 & {}^{2}1 & {}^{3}1 \\ {}^{1}2 & {}^{2}2 & {}^{3}2 \\ {}^{1}3 & {}^{2}3 & {}^{3}3 \end{pmatrix}$$

4. Man kann nun die Ergebnisse dieser Studie insofern zusammenfassen, als man in die Zustände der semiotischen Zustandsmatrizen Spuren bzw. Keime einsetzt,

und zwar korrespondieren offenbar die Spuren den Semiosen und die Keime den Retrosemiosen und im erweiterten, polykontexturalen Sinne die Semiosen den Morphismen und die Retrosemiosen den Heteromorphismen. Dabei erkennt man, dass man in semiotischen Zustandsmatrizen aus Nullstellen auf dem Hinweg aufbricht, aber nicht auf dem Rückweg aus ihnen aufbricht, sondern lediglich an ihnen ankommt bzw. zu ihnen zurückkehrt. Das „Nichts“ ist also immer und nur dort, wo ein semiotischer Prozess entsteht (die der Semiose vorangehende Kenese bzw. Meontik), aber er endet stets im Vermittelt-Sein der Semiotik.

Literatur

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007. Digitalisat: http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond-Theory-Collection.pdf

Konverse Subzeichen

1. Die semiotische Matrix

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

setzt sich in ihrer Horizontalen aus trichotomischen und in ihrer Vertikalen aus triadischen Perice-Zahlen zusammen:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & .1 & .2 & .3 \\ \hline 1. & 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2. & 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3. & 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{array}\right)$$

Für die kartesische Multiplikation gilt somit für alle a $\in$ tdP und alle b $\in$ ttP:

SZ = a. $\times$ .b = (a.b) „Koinzidenz von Haupt- und Stellenwerten“.

2. Wie bereits in Toth (2010) gezeigt wurde, stellt jedoch die Subzeichen-Struktur

(a.b)

nur einen Spezialfall unter 4 möglichen Strukturen dar die übrigen 3 sind:

(a. b.), (.a, .b), (.a b.). Diese Semiosen können mit Hilfe der Freyd-Scedrovschen Katgegorietheorie wie folgt als Morphismen definiert werden:

a.b = a□b

.ab = □ab

ab. = ab□

a..b = a□□b

Definieren wir mit nun mit Freyd und Scedrov (1989, S. 3):

□x := dom(x)

y□ := codom(y)

xy := Komposition von x und y,

dann haben wir also

a.b = a dom(b)

.ab = dom(a, b)

ab. = codom (a, b)□

a..b = a□□b.

Wir gehen aber noch einen Schritt weiter. Da für die Peircesche Semiotik gilt

dom(a.) = V(a.), codom(a.) = N(a.)

dom(.a) = V(.a), codom(.a) = N(.a).

Damit erhalten wir also folgende Übersicht

a.b = a dom(b) = aVb = ab

.ab = dom(a, b) = Vab

ab. = codom (a, b) = Nab

und können die semiotische Matrix wie folgt notieren

	VV3	V3	3
1	[1/VV3]	[1/V3]	[1/3]
N1	[N1/VV3]	[N1/V3]	[N1/3]
NN1	[NN1/VV3]	[NN1/V3]	[NN1/3]

Wie man erkennt, fallen somit die oft störenden Konversen weg, die überdies mit den entsprechenden Dualia koinzidieren (z.B. in der „Eigenrealität“: (3.1) = $(1.3)^{\circ}$ = $\times$(1.3), (2.2) = $(2.2)^{\circ}$ = $\times$(2.2)), denn wir haben

$[1/V3]^{\circ} = [N1/VV3]$

$[1/3]^{\circ} = [NN1/VV3]$

$[N1/3]^{\circ} = [NN1/V3]$.

Damit gilt selbstredend auch das Gesetz der verdoppelten Negation, das zur Ausgangsform zurückführt, nicht mehr länger:

$[1/V3]^{\circ\circ}$ ǂ $[1/V3]$, usw.

Man beachte noch, dass die Zählung im Bereich der diagonalen Peirce-Zahlen, d.h. der Hauptdiagonalen der Matrix, verläuft, und zwar wie folgt zweigleisig:

$[NN1/VV3] \rightarrow [N1/V3] \rightarrow [1/3] = [NN1 \rightarrow N1 \rightarrow 1] / [VV3 \rightarrow V3 \rightarrow 3]$, d.h.

„parallaktisch“, um einen Begriff R. Kaehrs zu verwenden:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[drr] & N1 \arrow[r] & NN1 \\
VV3 \arrow[r] & V3 \arrow[r] & 3
\end{tikzcd}$$

Bibliographie

Freyd, Peter J./Scedrov, Andre, Categories, Allegories. New York 1989

Toth, Alfred, Kartesische Multiplikation als Spezialfall morphismischer Abbildung. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, (2010)

Drei semiotische Matrizen über Zustandsmengen

1. Die Coalgebra, einer der jüngsten Disziplinen der Mathematik (und eine der wenigen, die nicht aus der Mathematik selbst entstanden sind) ist basiert auf einer Menge von Zuständen („states“), die auf Strukturen abgebildet werden. Offenbar passiert hier also das Gegenteil dessen, was in der Algebra gemacht wird: X → F(X) anstatt F(X) → X (vgl. zur leichten Einführung z.B. Jacobs 2005), und woraus sich das häufig verwendete Präfix Co- erklärt, das freilich bereits in der Co-Domäne, dem „Bildbereich“ zu finden ist, das sich der Kategorietheorie verdankt und damit die wichtigste Verknüpfung der Coalgebra andeutet. Wie man aus der Grundlegung einer Menge von Zuständen anstatt Elementen, Punkten, Räumen usw. vermutet, ist die Coalgebra ein Kind der Computerwissenschaft.

2. Im folgenden werden, entsprechend der Unterscheidung zwischen triadischen, tirchotomischen und diagonalen Peircezahlen (Toth 2009), drei Matrizen vorgeschlagen, wie man semiotische Zustandsmengen definieren könnte.

2.1. Transformation der trichotomischen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix I:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \square & 1.1 & \square & 1.2 & \square & 1.3 \\ \square & 2.1 & \square & 2.2 & \square & 2.3 \\ \square & 3.1 & \square & 3.2 & \square & 3.3 \end{pmatrix}$$

Sem. Zust.M.I ist also nach links durch Zustände, nach rechts durch Subzeichen (Objekte bzw. Morphismen, d.h. Semiosen) abgeschlossen.

2.2. Transformation der triadischen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix II:

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ \square & \square & \square \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ \square & \square & \square \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Sem. Zust.M.II ist nach oben durch Zustände, nach unten durch Subzeichen (Objekte bzw. Morphismen, d.h. Semiosen) abgeschlossen.

2.3. Transformation der diagonalen Peirce-Zahlen der semiotischen Matrix in die semiotische Zustandsmatrix III:

$$\begin{array}{cccccc} & \square & & \square & & \square \\ \square & 1.1 & \square & 1.2 & \square & 1.3 \\ & \square & & \square & & \square \\ \square & 2.1 & \square & 2.2 & \square & 2.3 \\ & \square & & \square & & \square \\ \square & 3.1 & \square & 3.2 & \square & 3.3 \end{array}$$

Sem. Zust.M.III ist nach links und oben durch Zustände, nach rechts und unten sowohkl durch Zustände als auch durch Subzeichen (Objekte bzw. Morphismen, d.h. Semiosen) abgeschlossen.

Bibliographie

Jacobs, Bart, Coalgebra. Nijmegen 2005 (Ms.)

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf (2009)

Subzeichen als Abbildungen von Primzeichen aus Domänen und Codomänen mit permutierten Kontexturenzahlen

1. Ein Subzeichen ist das kartesische Produkt aus zwei Monaden, von Bense (1980) als Primzeichen bezeichnet:

$(a.b) = a. \times .b$ mit $a, b, \in \{1, 2, 3\}$,

wobei der rechte Punkt P^ρ und der linke Punkt P^λ den Morphismus $(a \rightarrow b)$ abkürzen:

$\langle a. \in P^\rho, .b \in P^\lambda\rangle =: (a \rightarrow b) = \rightarrow_{\alpha,\beta}$.

Für Kontexturen K wollen wir kleine Buchstaben verwenden: i, j, k, ... $\in$ K. Nach dem oben Gesagten haben wir dann also

$\langle a._{i.j} \in P^\rho, .b_{k.l} \in P^\lambda\rangle =: (a \rightarrow b) = \rightarrow_{\alpha,\beta\ \langle i,j\rangle \rightarrow \langle k,l\rangle}$.

Einfach gesagt, gibt es also die folgenden Abbildungsmöglichkeiten zwischen kontexturierten Subzeichen:

$a_{ij} \rightarrow b_{kl}$ $\quad a_{ij} \rightarrow b_{lk}$ $\quad a_{ji} \rightarrow b_{lk}$ $\quad a_{ij} \rightarrow b_{jk}$

$a_{ij} \leftarrow b_{kl}$ $\quad a_{ij} \leftarrow b_{lk}$ $\quad a_{ji} \leftarrow b_{lk}$ $\quad a_{ij} \leftarrow b_{jk}$

2. Da für n-kontexturale (semiotische) Systeme gilt, dass (n-1)-stellige Kontexturenzahlen nur bei genuinen Subzeichen (identitiven Morphismen) aufscheinen, da ferner jede Zeichenklasse (mit Ausnahme der genuinen Kategorienklasse, der Hauptdiagonalen der semiotischen Matrix) maximal 1 genuines Subzeichen enthält, folgt, dass die kontexturalzahlige Struktur einer allgemeinen Zeichenklassen einer der folgenden drei Strukturen folgt:

$Zkl = (3.a_{ijk}\ 2.b_{ij}\ 1.c_{kl})$

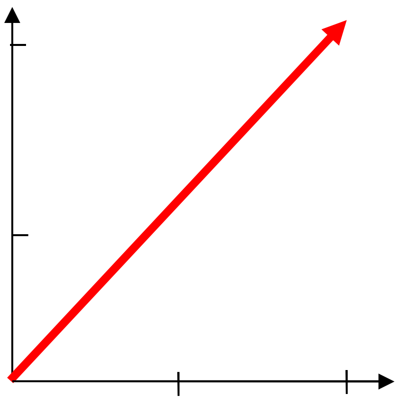
$Zkl = (3.a_{ij}\ 2.b_{ijk}\ 1.c_{kl})$

$Zkl = (3.a_{ij}\ 2.b_{kl}\ 1.c_{ijk})$

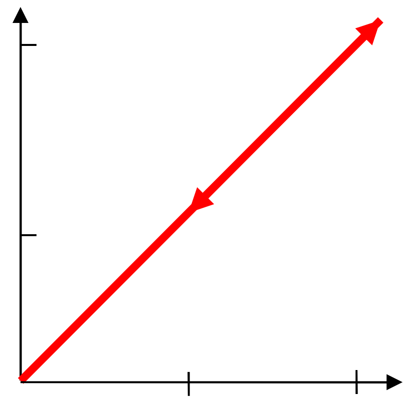
(wobei i, j, k nicht paarweise verschieden sein müssen).

$\wp$(i.j.k) = {(i.j.k), (i.k.j), (k.i.j), (k.j.i), (j.k.i), (j.i.k)}:

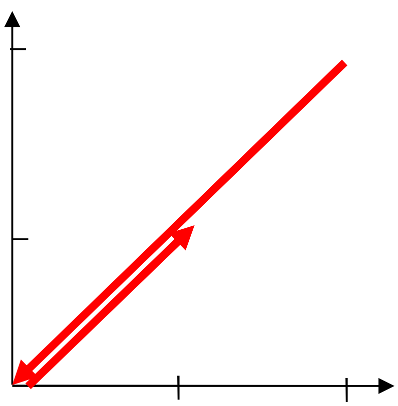
(i.j.k)



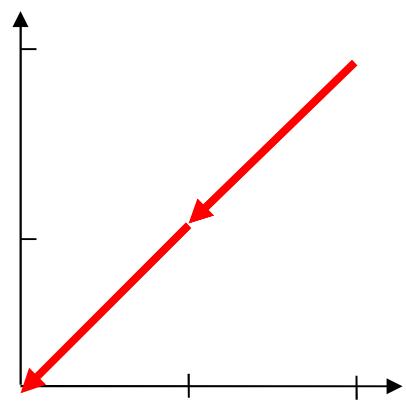
(i.k.j)



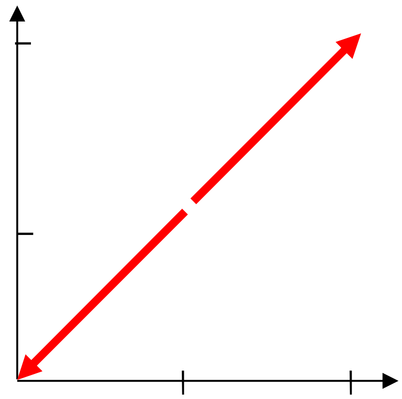
(k.i.j)



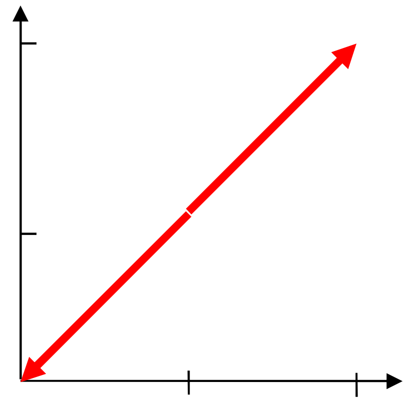
(k.j.i)



(j.i.k)

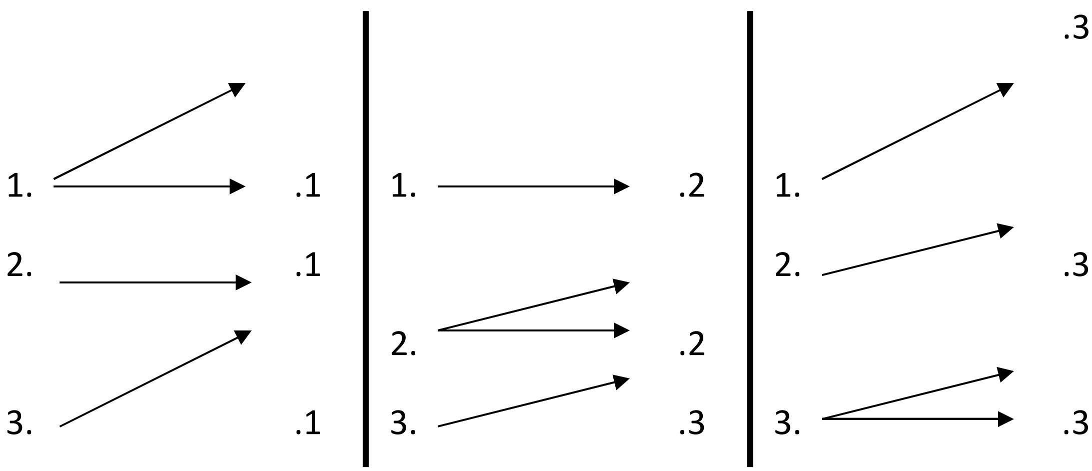


(j.k.i)



3. Sei a ∈ tdPz (triadische Peirce-Zahlen) und b ∈ ttPz (trichotomische Peirce-Zahlen). Dann kann man die tdPz und die ttPz jeweils als Zeile und Spalte einer im triadischen Falle quadratischen 3×3-Matrix notieren und erhält auf diese Weise die folgende, von Kaehr (2008, S. 6) gegebene kategorial-semiotische Matrix:

	1	2	3
1	$1 \to 1_{1.3}$	$1 \to 2_1$	$1 \to 3_3$
2	$2 \to 1_1$	$2 \to 2_{1.2}$	$2 \to 3_2$
3	$3 \to 1_3$	$3 \to 2_2$	$3 \to 3_{2.3}$



Dasselbe p.p. (vgl. Toth 2010) für die übrigen 3 Matrizen bzw. semiotischen Systeme:

	1	2	3
1	$1_{1.3} \rightarrow 1$	$1_1 \rightarrow 2$	$1_3 \rightarrow 3$
2	$2_1 \rightarrow 1$	$2_{1.2} \rightarrow 2$	$2_2 \rightarrow 3$
3	$3_3 \rightarrow 1$	$3_2 \rightarrow 2$	$3_{2.3} \rightarrow 3$

	1	2	3
1	$1 \leftarrow 1_{1.3}$	$1 \leftarrow 2_1$	$1 \leftarrow 3_3$
2	$2 \leftarrow 1_1$	$2 \leftarrow 2_{1.2}$	$2 \leftarrow 3_2$
3	$3 \leftarrow 1_3$	$3 \leftarrow 2_2$	$3 \leftarrow 3_{2.3}$

	1	2	3
1	$1_{1.3} \leftarrow 1$	$1_1 \leftarrow 2$	$1_3 \leftarrow 3$
2	$2_1 \leftarrow 1$	$2_{1.2} \leftarrow 2$	$2_2 \leftarrow 3$
3	$3_3 \leftarrow 1$	$3_2 \leftarrow 2$	$3_{2.3} \leftarrow 3$

Bibliographie

Bense, Max, Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980

Toth, Alfred, Kontexturierte Peirce-Zahlen als Domänen und als Kodomänen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Kontexturierte Peirce-Zahlen als Domänen und als Codomänen

1. Stellen Sie sich einen Lattenzaun vor mit n Latten. Um aus diesen n Latten einen Zaun zu verfertigen, der diesen Namen verdient, wird man die n Latten so anordnen, dass damit auch (n-1) Zwischenräume, wir nennen sie: Zwischenlatten, entstehen. Genau genommen besteht also ein Lattenzaun aus n Latten sowie (n-1) Zwischenlatten. Hat eine Menge n, deren Elemente qualitativ gleich sind, bei jeder Permutation immer (n-1) Zwischenräume? Verlangen Sie von Ihrem Lattenzaun, dass die Zwischenlatte immer den Raum von 2 Latten umfasst. Dann ist also (n-1) = 2n, d.h. n = 2n +1. Was wissen wir überhaupt von dem Nichts als Platzhalter des Seins bzw. von dem aus Unterbrüchen des Nichts definierten Sein?

2. Im folgenden wollen wir einen bedeutenden Schritt weitergehen, indem wir die Objekte, d.h. die Latten, von der einen („irdischen") Kontextur befreien. Eine Latte kann also in mehr als einer Kontextur erscheinen. Eine Kontextur ist aber der Geltungsbereich aus Positivität und Negativität, d.h. sie schliesst das Nichts ein. Jede Latte partizipiert demnach durch ihre Kontexturierung als Objekt am Nichts, d.h. am Jenseits der Latte, das als Zwischenraum definiert wurde. Damit wird also nun ein mathematischer Zusammenhang hergestellt zwischen den n Latten und den (n-1) Zwischenräumen, der weit jenseits der Arithmetik liegt. Streng genommen hätten wir die Frage, wieviel wir wirklich wissen über Latten und Zwischenlatten schon längst dahingehend beantworten sollen, dass sie an sich schon zwei verschiedenen Kontexturen angehören, etwa so wie Äpfel und Birnen, zwischen denen ja jegliche Arithmetik verboten ist, wie man aus den Anfängen des Mathematikunterrichts weiss. Daraus folgt jetzt also, dass man nicht nur die Latten, sondern auch die Zwischenlatten kontexturieren muss, also das Nichts, das zwischen dem Sein der Objekte steht. Was schliesslich die Relation der Latten und Zwischenlatten betrifft, so ist sie bidirektional, d.h. man kann beim Bau eines Zauns natürlich sowohl von den Latten als auch von den Zwischenräumen ausgehen.

3. Ein Subzeichen ist das kartesische Produkt aus zwei Monaden, von Bense (1980) als Primzeichen bezeichnet:

$(a.b) = a. \times .b$ mit $a, b, \in \{1, 2, 3\}$, wobei der rechte Punkt P^{ρ} und der linke Punkt P^{λ} den Morphismus $(a \rightarrow b)$ abkürzen:

$<a. \in P^{\rho}, .b \in P^{\lambda}> =: (a \rightarrow b) = \rightarrow_{\alpha,\beta}$.

Für Kontexturen K wollen wir kleine Buchstaben verwenden: i, j, k, ... $\in$ K. Nach dem oben Gesagten haben wir dann also

$<a._{i.j} \in P^{\rho}, .b_{k.l} \in P^{\lambda}> =: (a \rightarrow b) = \rightarrow_{\alpha,\beta <i,j>\rightarrow<k,l>}$.

Einfach gesagt, gibt es also die folgenden Abbildungsmöglichkeiten zwischen kontexturierten Subzeichen:

$a_{ij} \rightarrow b_{kl}$ $\quad$ $a_{ij} \rightarrow b_{lk}$ $\quad$ $a_{ji} \rightarrow b_{lk}$ $\quad$ $a_{ij} \rightarrow b_{jk}$

$a_{ij} \leftarrow b_{kl}$ $\quad$ $a_{ij} \leftarrow b_{lk}$ $\quad$ $a_{ji} \leftarrow b_{lk}$ $\quad$ $a_{ij} \leftarrow b_{jk}$

Aufgaben.

1. Die Gleichsetzung der oberen und der unteren Reihe von Abbildungen bedeutet die Verwechslung von Latten und Zwischenlatten.

2. „Die Existenz ist nicht hier und nicht dort, sie ist dazwischen“ (Max Bense, Fernsehsendung zum 60. Geburtstag 1979 produziert von SWF, Regie: Georg Bense).

4. Sei a $\in$ tdPz (triadische Peirce-Zahlen) und b $\in$ ttPz (trichotomische Peirce-Zahlen). Dann kann man die tdPz und die ttPz jeweils als Zeile und Spalte einer im triadischen Falle quadratischen 3×3-Matrix notieren und erhält auf diese Weise die folgende, von Kaehr (2008, S. 6) gegebene kategorial-semiotische Matrix:

	1	2	3
1	$1 \rightarrow 1_{1.3}$	$1 \rightarrow 2_{1}$	$1 \rightarrow 3_{3}$
2	$2 \rightarrow 1_{1}$	$2 \rightarrow 2_{1.2}$	$2 \rightarrow 3_{2}$
3	$3 \rightarrow 1_{3}$	$3 \rightarrow 2_{2}$	$3 \rightarrow 3_{2.3}$

Wegen der oben gegebenen 8 möglichen Abbildungen ergibt sich aber als weitere Matrix jene, bei der statt der Kodomänen die Domänen kontexturiert sind:

	1	2	3
1	$1_{1.3} \rightarrow 1$	$1_{1} \rightarrow 2$	$1_{3} \rightarrow 3$
2	$2_{1} \rightarrow 1$	$2_{1.2} \rightarrow 2$	$2_{2} \rightarrow 3$
3	$3_{3} \rightarrow 1$	$3_{2} \rightarrow 2$	$3_{2.3} \rightarrow 3$

Zwei weitere Matrizen ergeben sich durch „Umkehrung der Pfeile“ (Latten vs. Zwischenlatten!):

	1	2	3
1	$1 \leftarrow 1_{1.3}$	$1 \leftarrow 2_{1}$	$1 \leftarrow 3_{3}$
2	$2 \leftarrow 1_{1}$	$2 \leftarrow 2_{1.2}$	$2 \leftarrow 3_{2}$
3	$3 \leftarrow 1_{3}$	$3 \leftarrow 2_{2}$	$3 \leftarrow 3_{2.3}$

	1	2	3
1	$1_{1.3} \leftarrow 1$	$1_{1} \leftarrow 2$	$1_{3} \leftarrow 3$
2	$2_{1} \leftarrow 1$	$2_{1.2} \leftarrow 2$	$2_{2} \leftarrow 3$
3	$3_{3} \leftarrow 1$	$3_{2} \leftarrow 2$	$3_{2.3} \leftarrow 3$

5. Weil in monokontexturalen Systemen $\times(a.b) = (a.b)^{o} = (b.a)$ gilt, ist also die Transponierte einer semiotischen Matrix gerade jene, bei der Zeilen und Spalten vertauscht sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \to 1_{1.3} & 1 \to 2_1 & 1 \to 3_3 \\ 2 \to 1_1 & 2 \to 2_{1.2} & 2 \to 3_2 \\ 3 \to 1_3 & 3 \to 2_2 & 3 \to 3_{2.3} \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \to 1_{1.3} & 2 \to 1_1 & 3 \to 1_3 \\ 1 \to 2_1 & 2 \to 2_{1.2} & 3 \to 2_2 \\ 1 \to 3_3 & 2 \to 3_2 & 3 \to 3_{2.3} \end{pmatrix}$$

Strukturell gilt also $M^T = M$, d.h. es werden unkontexturierte Primzeichen der Domäne auf kontexturierte Primzeichen der Kodomäne durch Morphismen abgebildet, die von den Domänen zu den Kodomänen führen (ρ-Direktional).

Auf jeden Fall aber handelt es suich bei den vier semiotischen Matrizen um 4 verschiedene semiotische Systeme und nicht nur um Varianten von Kaehrs $cat^{(3)}(Sem^{(3,2)})$.

Bibliographie

Bense, Max, Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3, 1980

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. Glasgow 2010, elektr. Version unter www.thinkartlab.com erhältlich

Kontexturen und semiotische Mediation

1. Vom Standpunkt der monokontexturalen (Peirceschen) Semiotik ist die Zweitheit, die merwürdigerweise mit dem Objektbezug des Zeichens identifiziert wird, die eigentliche vermittelnde Kategorie in der Zeichenrelation

ZR = (M, O, I),

wogegen schon van den Boom (1981) mit Recht darauf hingewiesen hatte, dass das Peircesche „Medium" das semiotische Objekt mit dem Interpretantenkonnex vermittle:

ZR* = (O, M, I).

Diese Relation existiert tatsächlich; nach Bense (1971, S. 39 ff.) ist es die Relation der semiotischen Kommunikation. Berücksichtigt man noch, dass die Semiose intendiert ist, d.h. mit dem Interpretanten beginnt, kommen wjr zu

**ZR = (I, M, O),

und auch diese Relation ist semiotisch definiert; nach Bense liegt hier das Ordnungsschema der semiotischen Kreativität vor.

Da auch die restlichen 4 Permutationen von $\wp$(M, O, I) definiert sind, d.h. (IOM) als Schema der Realitätsthematiken; (OIM) für natürliche Zeichen (Anzeichen), und (IOM) für Symptome, können also rein theoretisch alle drei Fundamentalkategorien vermitteln. Von der relationalen Valenz her gesehen scheinen jedoch die Ordnungsschemata (OMI) und (IMO) die natürlichsten zu sein, denn das 1-stellige M wird nach links vom 2-stelligen O und nach rechts vom 3-stelligen I gebunden (bzw. vice versa), es kann aber in initialer Stellung (MOI/MIO) keinesfalls höherstellige Valenzen selber binden.

2. Im numerischen Schema der semiotische Matrix, das auf den Definitionen

M := 1, O := 2, I := 3

beruht, vermittelt die 2 der “Peirce-Zahlen“ sowohl trichotomisch als auch triadisch zwischen 1 und 3:

$$\begin{array}{ccccc} 1.1 & \rightarrow & 1.2 & \rightarrow & 1.3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \boxed{2.1} & \rightarrow & \boxed{2.2} & \rightarrow & \boxed{2.3} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3.1 & \rightarrow & 3.2 & \rightarrow & 3.2 \end{array}$$

Was nun die semiotischen Kontexturen dieser semiosischen Vermittlungen anbetrifft, so würde annehmen, sie seien selbst Mediationen, d.h. vermittelnde Kontexturenzahlen würden an vermitteklnde Subzeichen treten. In Wahrheit ist dies aber nicht der Fall; vgl. die folgende 3-kontexturelle Matrix aus Kaehr (2009):

$$\mathrm{Sem}^{(3,2)} = \begin{array}{c} MM \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1.1}_{\mathbf{1.3}} & \mathbf{1.2}_{\mathbf{1}} & \mathbf{1.3}_{\mathbf{3}} \\ \mathbf{2.1}_{\mathbf{1}} & \mathbf{2.2}_{\mathbf{1.2}} & \mathbf{2.3}_{\mathbf{2}} \\ \mathbf{3.1}_{\mathbf{3}} & \mathbf{3.2}_{\mathbf{2}} & \mathbf{3.3}_{\mathbf{2.3}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Koinzidenz zwischen semiosischer und kontextureller Vermittlung ($\sqcup$) stimmt somit nur im Objektbezug, und zwar sowohl in der Trichotomie

$(2.1)_1 \sqcup_{1.2} (2.3)_2$

als auch in der Triade

$(1.2)_1 \sqcup_{1.2} (3.2)_2$

denn für die Subzeuichen der gleichen Matrix gilt:

$(a.b)^o = \times(a.b)$,

d.h. Konverse und Duale koinzidieren (das ist nicht mehr der Fall für verschiedene Matrizen, z.B. diejenige einer Zeichenklasse und einer Realitätsthematik).

3. Versuchen wir nun, semiosische und kontexrelle Mediation zu vereinigen, so erkennen wir bald, dass dies unmöglich ist (mit Fragezeichen versehen wir Subzeichen, deren Kontexturenzahlen als vermittelnde „widersprüclich“ werden):

3.1. Mediationen für Trichotomien:

$1.1_{1.3}$	1.2_{1}	1.3_{3}		1.2_{1}	$1.1_{1.3}$	1.3_{3}
2.1_{1}	$2.2_{1.2}$	2.3_{2}	$\Rightarrow$	$2.2_{??}$	$2.1_{1.3}$	$2.3_{??}$
3.1_{3}	3.2_{2}	$3.3_{2.3}$		$3.2_{??}$	3.1_{3}	$3.3_{??}$

Z.B müsst wegen $(3.1)_3$ entweder $K(3.2) = 3$ oder $K(3.3) = 3$ sein, dies aber im Widerspruch zu $(3.1)_3 = (1.3)_3$.

3.2.Mediationen für Triaden:

1.1_{1}	$2.1_{1.3}$	3.1_{3}	2.1_{1}	$1.1_{1.3}$	3.1_{3}	1.1_{1}	$2.1_{1.3}$	3.1_{3}
$1.2_{1.3}$	$2.2_{1.3.2}$	3.2_{2}	1.2_{1}	$2.2_{1.2}$	3.2_{2}	$1.2_{1.3}$	$2.2_{1.2.3}$	3.2_{2}
1.3_{3}	2.3_{2}	$3.3_{??}$	1.3_{3}	2.3_{2}	$3.3_{??}$	1.3_{3}	$2.3_{??}$	$3.3_{1.2}$

Es geht sogar dann nicht, wann die Erstheit als Medium in die Mitte setzt (mittlere Matrix. Man erkennt sofort, dass in sämtlichen Fällen der Grund für das Scheitern darin liegt, dass $K(a.b)_{ik} \neq K(b.a)_{ik}$

3.3. Dasselbe gilt für Mediationen in Trichotomischen Triaden (Zkln):

$3.1_{3}\ 2.1_{3.1}\ 1.1_{1}$

$3.1_{3}\ 2.1_{3.2}\ 1.2_{2}$

$3.1_{3}\ 2.1_{3}\ 1.3_{3}$

$3.1_{3}\ 2.2_{3.2}\ 1.2_{2}$ $\rightarrow$ Widerspruch

Wegen $K(2.1)_{3.2} \neq K(2.1)_3$, ist das System inkonsistent.

Triadische Trichotomien (Rthn) praemissis praemittendis.

Es gibt somit keine kontexturelle Vermittlung weder für Zkln noch für Rthn, jedenfalls dann, wenn man Zkln und Rthn als das nimmt, als was sie definiert wurden: als hinsichtlich ihrer je zwei konkatenierten Dyaden übersummative Konstrukte! Sie müssen aus den Subzeichen zusammengesetzt werden, so dass also streng genommen nicht die Zkln/Rthn, sondern nur deren dyadische Basen in Komtexturen liegen. Das spielt aber insofern keine Rolle, als in Toth (2010, Path.) gezeigt wurde, dass Teilmengen sogar in anderen Kontexturen liegen können als ihre Obermengen:

3.1 2.1. 1.3 = $(I \supset M, O \supset M, M \subset I)$

$\times$(3.1 2.1 1.3) = (3.1 1.2 1.3) = $(I \subset M, M \subset O, M \subset I)$, usw.

Bibliographie

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Kaehr, Rudolf, Polycontexturality of signs? In: Diamond Semiotic Short Studies, S. 251 ff.
http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf (2009)

Toth, Alfred, Pathologien der Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2010)

Van den Boom, Holger, Der Ursprung der Peirceschen Zeichentheorie. In: Zeitschrift für Semiotik 3, 1981, S. 23-39

Pathologien der Semiotik

1. Eine Besonderheit der Peirceschen Kategorienlehre besteht bekanntlich darin, dass Peirce seine Kategorien mit den später von Bense so bezeichneten „Primzeichen" (bzw., wie ich vorziehe: Peirce-Zahlen) zu identifizierenn, was es ihm erlaubt, eine semiotische Matrix aus der kartesischen Multiplikation dieser kategorien herzustellen. So entspricht also z.B. (1.1) der „Möglichkeit der Möglichkeit", (1.2) der „Wirklichkeit der Möglichkeit", (2.1) der „Möglichkeit der Wirklichkeit", usw. Eine beliebige Zeichenklasse wie z.B. (3.1 2.1 1.3) enthält also z.B. 3 mal die Erstheit, 1mal die Zweitheit und 2mal die Erstheit, d.h. ausgehend von der maximalen (argumentischen) Zeichenklasse (3.3 2.3 1.3) mit Repräsentationswert 3+3+2+3+1+3 = 15 entfallen 2/15 für M, 1/15 für O und 3/15 = 1/5 für I. Geht man als Basis von jeder Zeichenklasse separat aus, entfallen bei Rpw(3.1 2.1 1.3) = 11: 2/11 für M, 1/11 für O und 3/11 für I. Was wir hier also vor uns haben, sind **gebrochene Kategorien**. Wenn wir uns bewusst sind, dass ein Kategorie ein (seins- oder bewusstseinsmässiges) Universale ist, so ist das nichts als barer Unsinn.

2. Dieser philosophische Unsinn wird dort zum mathematischen und logischen Unsinn, wenn die Zusammensetzungen dieser gebrochenen Kategorien, d.h. die kartesischen Produkte, relationentheoretisch untersucht werden. Wenn wir für M := ^1R, O := ^2R, I := ^3R setzen, erhalten wir folgende **relationentheoretische Matrix**:

	^1R	^2R	^3R
^1R	$^1R^1R$	$^1R^2R$	$^1R^3R$
^2R	$^2R^1R$	$^2R^2R$	$^2R^3R$
^3R	$^3R^1R$	$^3R^2R$	$^3R^3R$

Wohl kann eine 3-stellige Relation eine 1-stellige binden ($^3R^1R$); aber das Umgekehrte ($^1R^3R$) ist unmöglich. Ferner haben wir hier gesättigte neben unter- und übersättigten Relationen. Sind letztere einfach unmöglich, müsste man bei Fällen wie ($^3R^1R$) valenztheoretisch noch ein ^2R binden können, dass wir also drei mögliche dyadische Subzeichen in einer 3. semiotischen Dimension bekommen (^2R $^3R^1R$), ($^3R^2R$ ^1R) oder ($^3R^1R^2R$) = (2.3.1), (3.2.1) oder (3.1.2), wobei nicht einmal klar wäre, welche Zahlen hier Triade, Trichotomie oder Dimensionszahl sind. Niemand würde in der logischen Linguistik Ausdrücke wie „Zürich liegt zwischen St. Gallen“ oder „Maria liebt Adam einen Brief“ als grammatisch akzeptieren. Genauso aber verhalten sich die relationalen gebrochenen Peirceschen Kategorien, da sie jeder Valenz spotten.

3. Nun ist es so, dass bereits Bense (1971) Permutationen der semiotischen „Normalform“

ZR = (M, O, I)

akzeptiert hat. So ist (O, M, I) das Schema der Kommunikation, (I, M, O) dasjenige der Peirceschen Kreativität. Dass (I, M, O) einfach das Schema der dualen Realitätsthematiken ist, ist klar. Zusammen mit den beiden übrigen möglichen Grundformen (O, I, M) und (M, I, O) ist also die ganze Menge $\wp$(M, O, I) semiotisch definiert. Damit kommen aber zu den bereits aufgezählten kategorialen und relationalen Pathologien als nächstes die **mengentheoretischen** Pathologien, da wir nun entsprechend der Grunddefinition des Zeichens (Bense 1979, S. 53)

1. ZR = (M, ((M $\subset$ O), (O $\subset$ I)))

auch noch haben

2. ZR = (M, ((M $\subset$ I), (I $\subset$ O)))

3. ZR = (O, ((O $\subset$ M), (M $\subset$ I)))

4. ZR = (O, ((O $\subset$ I), (I $\subset$ M)))

5. ZR = (I, ((I $\subset$ M), (M $\subset$ O)))

6. ZR = (I, ((O $\subset$ O), (O $\subset$ M))),

d.h. insbesondere alle Fälle, wo Obermengen kleiner als Untermengen und Untermengen grösser als Obermengen sind.

4. Eine vierte, **kontexturelle**, Pathologie ist nicht sehr leicht aufzufinden. Gehen wir aus von der numerischen semiotischen Matrix in ihrer 3-kontexturalen Form (Kaehr 2009, S. 9):

3 – contextural semiotic matrix

$$\mathrm{Sem}^{(3,2)} = \begin{pmatrix} \mathrm{MM}^{(3,2)} & .1_{1.3} & .2_{1.2} & .3_{2.3} \\ 1_{1.3} & \mathbf{1.1_{1.3}} & \mathbf{1.2_{1}} & \mathbf{1.3_{3}} \\ 2_{1.2} & \mathbf{2.1_{1}} & \mathbf{2.2_{1.2}} & \mathbf{2.3_{2}} \\ 3_{2.3} & \mathbf{3.1_{3}} & \mathbf{3.2_{2}} & \mathbf{3.3_{2.3}} \end{pmatrix}$$

Mit Bense (1986, S. 14 ff.) sprechen wir von M, O und I als Universen. Wie man sieht, gilt für triadische Universen ($\underline{U}_{1.} \subset \underline{U}_{2.} \subset \underline{U}_{3.}$), während für trichotomische Universen (wegen 3.a 2.b 1.c mit $a \leq b \leq c$) gilt ($\underline{U}_{.1} \subseteq \underline{U}_{.2} \subseteq \underline{U}_{.3}$). Als nächstes zeigen wir die Verteilungen der komntexturellen Vermittlungen:

1. Im Teilbereich von ($\underline{U}_{1.} \subset \underline{U}_{2.} \subset \underline{U}_{3.}$) gilt:

$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{21} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$

$\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{31} = \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{22} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset$,

2. Im Teilbereich ($\underline{U}_{.1} \subseteq \underline{U}_{.2} \subseteq \underline{U}_{.3}$) gilt:

$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{12} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$

$\underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{13} = \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset$ $\quad$ $\underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset$

Was für Schlüsse können hieraus gezogen werden? Erstens sind die Verhältnisse für die Tripeluniversen völlig unabhängig von den Peirce-Zahlen, denn sie sind strukturell identisch (dies selbst ist eine Art von schwacher Pathologie). Zweitens aber stehen wir vor der semiotisch erregenden Tatsache, dass sowohl im trichotomischen

$(1.2)_1 \subset (1.3)_3$

als auch im triadischen Fall

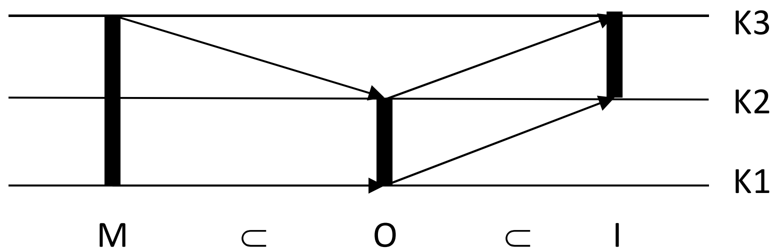
$(1.3)_3 \subset (2.3)_2$

zwei Teiluniversen, obwohl sie ineinander topologisch enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen können, und zwar obwohl hier keine Spur von semiotischer (via Subzeichen oder Semiosen) bzw. kontextureller Mediation vorliegt!

Wenn wir jedoch nochmals zur Zeichendefinition (Bense 1979, S. 53) zurückgehen

$ZR = (M_{1.3}, ((M_{1.3} \rightarrow O_{1.2}), (O_{1.2} \rightarrow I_{2.3}))),$

so erkennen wir, dass hier noch alles in Ordnung ist, denn alle Kategorien sind nicht nur durch Mengeninklusion, sondern auch durch kontexturellen Zusammenhang miteinander verbunden:



In Toth (2010) hatte ich diese kontexturelle Pathologie als semiotischen Satz formuliert:

Theorem: Semiotische Teilsysteme können, obwohl sie topologisch ineinander enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen.

Da die Verhältnisse in der obigen Tabelle dann pathologisch zu werden beginnen, wenn man die einfachen Kategorien durch die „gebrochenen“ ersetzt, dürfte der Grund für die kontexturelle Pathologie ebenfalls in den gebrochenen Kategorien liegen.

Bibliographie

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Repräsenation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Kaehr, Rudolf, Polycontexturality of signs? In: Diamond Semiotic Short Studies, S. 251 ff.
http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf (2009)

Toth, Alfred, Der Zusammenhang von Zeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2010)

Der Zusammenhang von Zeichen

1. Die monokontexturale Bense-Semiotik kennt nur zwei Arten des Zusammenhangs von Zeichen:

1.1. Zusammenhang durch gemeiname Subzeichen, z.B.

Z [($\underline{3.1}$ 2.1 1.1), ($\underline{3.1}$ 2.2 1.2))] = (3.1)

1.2. Zusammenhang durch gemeinsame Semiosen, z.B.

Z [(3.1 $\underline{2.3\ 1.3}$), (3.2 $\underline{2.3\ 1.3}$)] = (2.3 → 1.3)

Da eine Semiose eine Abbildung (Morphismus) zweier Subzeichen ist, setzt 1.2 immer 1.1 voraus. Allerdings können nach Bense die Subzeichen selber nicht nur als Objekte, sondern auch als Morphismen aufgefasst werden; Objekte sind dann nicht die Dyaden, sondern die Monaden.

2. Nun stellen jedoch M, O und I nach Bense (1986, S. 17 ff.) „Tripel-Universen" dar. Allerdings sind diese Universen nicht diskret, sondern wegen

ZR = (M, ((M → O), (O → I)))

gilt:

$(\underline{U}_M \subset (\underline{U}_O \subset \underline{U}_I))$.

Auf der Ebene der Peirce-Zahlen sind die Verhältnisse jedoch leicht verschieden, denn wie man sich anhand der semiotischen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

leicht überzeugt, gilt ja für die Triaden

$(\underline{U}_{1.} \subset \underline{U}_{2.} \subset \underline{U}_{3.})$,

wogegen für die Trichotomien gilt

$(\underline{U}_{.1} \subseteq \underline{U}_{.2} \subseteq \underline{U}_{.3})$.

Nun betrachten wir aber die kontexturellen Vermittlungen der triadischen Semiotik, die auf der Basis ihrer 4 2-kontexturellen Semiotiken beruht (Kaehr 2009, S. 9:

3 – contextural semiotic matrix

$$\text{Sem}^{(3,2)} = \begin{pmatrix} \text{MM}^{(3,2)} & .1_{1.3} & .2_{1.2} & .3_{2.3} \\ 1_{1.3} & \mathbf{1.1_{1.3}} & \mathbf{1.2_{1}} & \mathbf{1.3_{3}} \\ 2_{1.2} & \mathbf{2.1_{1}} & \mathbf{2.2_{1.2}} & \mathbf{2.3_{2}} \\ 3_{2.3} & \mathbf{3.1_{3}} & \mathbf{3.2_{2}} & \mathbf{3.3_{2.3}} \end{pmatrix}$$

Im Teilbereich von $(\underline{U}_{1.} \subset \underline{U}_{2.} \subset \underline{U}_{3.})$ gilt:

$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{21} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$

$\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{31} = \emptyset$ $\underline{U}_{22} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset$

wogegen im Teilbereich $(\underline{U}_{.1} \subseteq \underline{U}_{.2} \subseteq \underline{U}_{.3})$ gilt

$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{12} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$

$\underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{13} = \emptyset$ $\underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset$ $\underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset$

Was für Schlüsse können hieraus gezogen werden? Erstens sind die Verhältnisse für die Tripeluniversen völlig unabhängig von den Peirce-Zahlen, denn sie sind strukturell identisch. Zweitens aber stehen wir vor der semiotisch erregenden Tatsache, dass sowohl im trichotomischen

$(1.2)_1 \subset (1.3)_3$

als auch im triadischen Fall

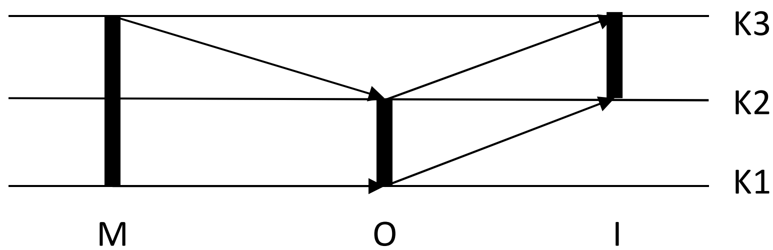
$(1.3)_3 \subset (2.3)_2$

zwei Teiluniversen, obwohl sie ineinander topologisch enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen können, und zwar obwohl hier keine Spur von semiotischer (via Subzeichen oder Semiosen) bzw. kontextureller Mediation vorliegt!

Wenn wir jedoch nochmals zur Zeichendefinition (Bense 1979, S. 53) zurückgehen

$ZR = (M_{1.3}, ((M_{1.3} \rightarrow O_{1.2}), (O_{1.2} \rightarrow I_{2.3}))),$

so erkennen wir, dass hier noch alles in Ordnung ist, denn alle Kategorien sind nicht nur durch Mengeninklusion, sondern auch durch kontexturellen Zusammenhang miteinander verbunden:



Ich möchte diese Pathologie als Satz formulieren dürfen:

Theorem: Semiotische Teilsysteme können, obwohl sie topologisch ineinander enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen.

Der Grund für ihr Auftreten dürfte in den von mir schon in früheren Arbeiten bemerkten ebenfalls pathologischen „gebrochenen" Kategorien liegen, die Peirce erfunden hat. Man bedende einmal, dass eine Kategorie ein Denkuniversale ist. Nun basiert die gesamte Semiotik darauf, dass aus solchen Denkuniversalen „kartesische Produkte" gebildet werden. – Diese ganze Thematik, die hier angerissen wurde, ist indessen noch sehr weit von irgendwelchen Lösungen entfernt, so dass ich an dieser Stelle vorderhand abbreche.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

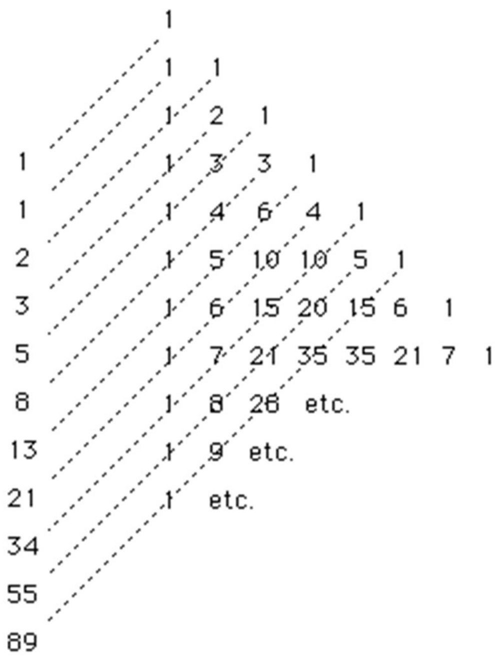
Bense, Max, Repräsenation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Kaehr, Rudolf, Polycontexturality of signs? In: Diamond Semiotic Short Studies, S. 251 ff.

http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf (2009)

Fibonacci-Zahlen, Pascalsche Diagonalsummen und Trichotomienwechsel

1. Die folgende Graphik, die ich einer Studierenden von mir verdanke, die sie jedoch ihrerseits einer anderen Quelle entnahm, die nicht mehr rekonstruierbar scheint, gibt den Zusammenhang zwischen Diagonalzahlen im Pascalschen Dreieck und den Fibonacci-Zahlen (ohne die 0) an:



2. Anderseits stehen, wie ich bereits in Toth (2007, S. 186 ff.) gezeigt hatte, die Zahklen des Pascalschen Dreiecks, d.h. die sog. figurativen Zahlen,in direktem Zusammenhang mit dem Phänomen des Trichotomienwechsels in n-wertigen Semiotiken mit n ≥ 4, genauer: sie geben den Anfang, das Ende und somit die Länge von Trichotomien an. Ich hoffe, dass die Verkleinerungen aus meinem Buch „Zwischen den Kontexturen“ noch lesbar sind, ansonsten sei auf die Original-publikation verwiesen.

3. Strukturen der pentadischen, hexadischen und n-adischen Semiotik

Wieviel Raum die Darstellung höherwertiger Semiotiken für $n > 4$ einnehmen würde, läßt sich daran ermessen, daß schon die pentadische Semiotik 126 und die hexadische 462 Zeichenklassen zu ihrer Darstellung benötigen. Wenn man sich nun die Zahlen 10, 35, 126, 462 anschaut, die den Anzahlen der Zeichenklassen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotik entsprechen, so fällt auf, daß es sich hier um 2-, 3-, 4- und 5-dimensionale Zahlen handelt, die eine Teilmenge der figurativen Zahlen bilden, worunter man bekanntlich natürliche Zahlen versteht, die "Anzahlen von Punkten darstellen, welche gleichmäßig auf den Ecken, den Seiten und im Innern von regelmäßigen ebenen oder räumlichen Figuren verteilt sind" (Flachsmeyer 1969: 74). Figurative Zahlen entstehen "durch fortschreitendes Summieren der Glieder einer arithmetischen Reihe" (Bischoff 1997: 179). Mehrdimensionale Zahlen lassen sich am einfachsten mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks darstellen:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Während die erste Zeile und Spalte aus Einserfolgen besteht, finden wir in der zweiten Zeile und Spalte die Folge der natürlichen Zahlen, also die eindimensionalen Zahlen. In der dritten Zeile und Spalte stehen die zweidimensionalen Dreieckszahlen, in der vierten die dreidimensionalen Tetraederzahlen, in der fünften die vierdimensionalen Zahlen, in der sechsten die fünfdimensionalen Zahlen, usw. Diese lassen sich nicht nur aus dem Pascalschen Dreieck ablesen, sondern auch durch einfache Formeln berechnen:

Dreieckszahlen: 1, 3, 6, **10**, 15, 21, 28, 36, 45, 55, …
$\frac{1}{2} n (n + 1)$

Tetraederzahlen: 1, 4, 10, 20, **35**, 56, 84, 120, 165, 220, …
$1/6\, n (n + 1) (n + 2)$

4-dimensionale Zahlen: 1, 5, 15, 35, 70, **126**, 210, 330, 495, 715, …
$1/24\, n (n + 1) (n + 2) (n + 3)$

5-dimensionale Zahlen: 1, 6, 21, 56, 126, 252, **462**, 792, 1287, 2002, …
$1/120\, n (n + 1) (n + 2) (n + 3) (n + 4)$

Die in der obigen Darstellung fett markierten Zahlen sind also zugleich die Anzahlen der triadischen, tetradischen, pentadischen und hexadischen Semiotiken. Damit korrespondieren also zweidimensionale Zahlen mit der triadischen Semiotik, dreidimensionale mit der tetradischen Semiotik ..., allgemein: n-dimensionale Zahlen mit der n+1-dimensionalen Semiotik, und zwar gibt offenbar die n+2-te n-dimensionale Zahl einer n+1-adischen Semiotik die Anzahl derer Zkl×Rth an.

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich zwischen den mehrdimensionalen Zahlen und den Anzahlen der Trichotomien eines vollständigen triadischen, tetradischen, pentadischen, hexadischen, ... n-adischen Dualsystems. Wie wir gesehen haben, findet in der triadischen Semiotik Trichotomienwechsel zwischen der 6. und der 7, sowie zwischen der 9. und 10. Zkl×Rth statt. Die 10 triadischen Zkln×Rthn unterteilen sich also in 3 Trichotomien, und zwar in eine mit 6 Zkln×Rth, in eine mit 3 Zkln×Rthn und in eine mit 1 Zkl×Rth. In der tetradischen Semiotik findet Trichotomienwechsel zwischen der 20. und der 21., zwischen der 30. und der 31. und zwischen der 34. und der 35. Zkl×Rth statt. Die 35 tetradischen Zkl×Rth unterteilen sich somit in 4 Trichotomien, und zwar in eine mit 20 Zkl×Rth, in eine mit 10, in eine mit 4 und in eine mit 1 Zkl×Rth. Stellen wir diese Anzahlen mit den entsprechenden Anzahlen in der pentadischen und hexadischen Semiotik zusammen:

Triadische Semiotik:	3 Trichotomien; Anzahlen: 6, **3**, 1
Tetradische Semiotik:	4 Trichotomien; Anzahlen: 20, 10, **4**, 1
Pentadische Semiotik:	5 Trichotomien; Anzahlen: 70, 35, 15, **5**, 1
Hexadische Semiotik:	6 Trichotomien; Anzahlen: 252, 126, 56, 21, **6**, 1

Wie man leicht erkennt, sind die Anzahlen der Trichotomien der ersten n für n ≤ 6 wieder die ersten n-dimensionalen Zahlen für n ≤ 5, nur in umgekehrter Reihenfolge. Offenbar gibt also die jeweils zweite n-dimensionale Zahl die Anzahl der Trichotomien einer n+1-adischen Semiotik an. Damit kann man nun auch die Orte der Trichotomienwechsel auf einfache Weise bestimmen: Man subtrahiert von der n-ten Zahl nacheinander zuerst die erste Zahl, dann die Summe aus der ersten und zweiten Zahl, dann diejenige aus der ersten, zweiten und dritten Zahl ..., nicht aber die Summe der ersten und der n–1ten Zahl, da diese Differenz 0 beträgt und trivialerweise der Anfang eines semiotischen Dualsystems kennzeichnet.

Mit diesen Ergenissen vgl. man diejenigen zwischen Fibonacci- und Peirce-Zahlen einerseits (Toth 2010a) sowie zwischen zwei neu entdeckten semiotischen Zahlen, den Stufenzahlen und dem Reflexionsüberschuss.

Bibliographie

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Fibonacci-Zahlen und Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Stufenzahlen und Relationsüberschuss. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Stufenüberschüsse und Relationsüberschüsse

1. In Toth (2010) hatten wir die semiotischen **Stufenzahlen** (SÜ) als Differenz zwischen den Summenzahlen einer Relationszahl n und deren korrespondierender Fibonacci-Zahl eingeführt:

SZ =($\sum_{i=0}^{n} \sigma i$ - $\sum_{i=n-1}^{n} \sigma i$) = ΣZ – FZ.

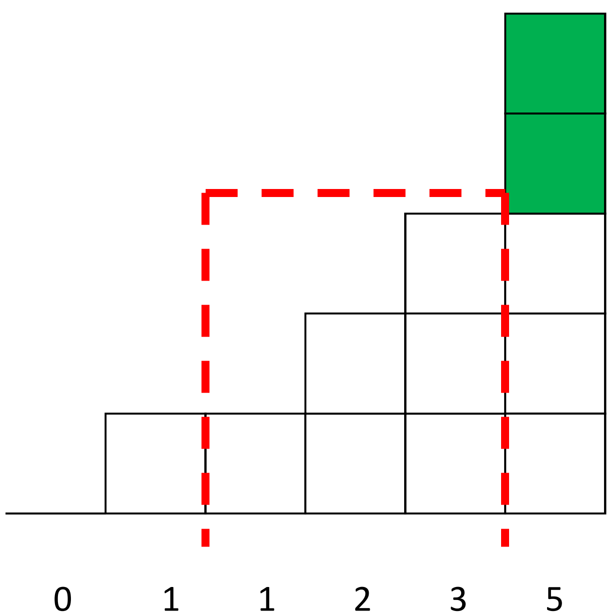
Die Stufenzahl ist also der „Überschuss“ zwischen der Summe aller n Summanden und derjenigen nur der letzten beiden Summanden einer n-stelligen Relation. In der eingangs gegeben Progression der Fibonacci-Zahlen

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	$f_{...}$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1.597	2.584	4.181	6.765	10.946	17.711	28.657	46.368	...

sind die SZ also einfach die Differenz des Funktionsindexes und der Fibonacci-Zahl, d.h.

SÜ = {0, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 6, 13, 25,45, 78, 132, ...}.

In der folgenden Graphik der FZ sind der rot eingerahmte Bereich die PZ, und grün ist der Stufenüberschuss, d.h. SZ:



2. Als weitere semiotische Zahl wollen wir den **Relationsüberschuss** (RÜ) als die Differenz zwischen den Summenzahlen und den Relationszahlen, d.h. den enhtsprechenden Peano-Zahlen definieren:

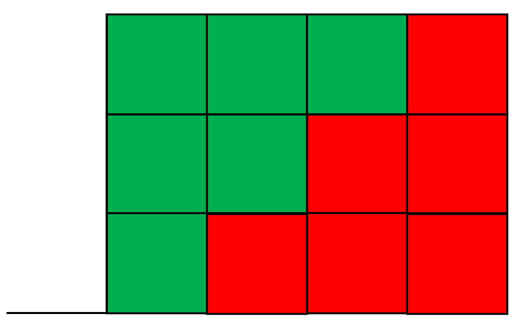
$\text{RÜ} = \Sigma\text{Z} - \text{PZ}$

ΣZ	0	1	3	6	10	15	21	28 ...
PZ	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
RÜ	0	0	1	3	6	10	15	21

Wie man leicht erkennt, sind die RÜ nichts anderes als die positional um eine Triade nach rechts im Zahlenstrahl verschobenen Dreieckszahlen:

ΣZ	0	1	3	6	10	15	21	28 ...
RÜ	0	0	1	3	6	10	15	21

In der folgenden, auf die semiotische Triade reduzierten Figur (rot) sind die RÜ grün markiert.



Bibliographie

Toth, Alfred, Fibonacci-Zahlen und Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Fibonacci-Zahlen und Peirce-Zahlen

1. Wie bekannt, kann man die Fibonacci-Zahlen durch die Formel

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 2$$

berechnen. Dabei wird als Anfangswert 0 und für die zweite Zahl 1 gesetzt; jede weitere Zahl ist dann die Summe ihrer beiden Vorgängerzahlen:

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	$f_{...}$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1.597	2.584	4.181	6.765	10.946	17.711	28.657	46.368	...

2. Setzt man jedoch als Anfangswert 1, so erhält man

FZ =(1, 1,2, 3, 5,..),

d.h. die Anfangszahl wird sozusagen zweimal gesetzt. Obwohl hier nur eine Spekulation möglich ist, möchte ich doch darauf hinweisen, dass die Notwendigkeit, die semiotische Erstheit verdoppelt zu setzen, von Rudolf Kaehr (2008, S. 1) entdeckt wurde:

Firstness as a doublet
A composition always is accompanied by an environment of its morphisms. Therefore, an initial object or the number 1, firstness, is diamond theoretically always doubled: as itself and as its environment, i.e.(A | a). That is, as a morphism, and as a hetero-morphism. A diamond initial object is not a singular object but a *doublet*. Also called *bi-object*. Furthermore, self-identity is able to distinguish its directionality as left (lo) and right (ro) order.

Im Gegensatz zu den Peirce-Zahlen

PZ = (1, 2, 3),

die als rein monokonteturale Zahlen ja keine Unterscheidung zwischen Objekt und Umgebung ermöglichen, wird diese Nowendigkeit also von den Fibonacci-Zahlen erfüllt.

3. Man braucht aber die Anfangs-0 bei den Fibonacci-Zahlen gar nicht wegzulassen, denn sie korrespondiert genau mit der von Kaehr entdeckten „diamond zeroness“ (2008, S. 1) bzw. den bereits von Bense stipulieren Kategorialzahlen, welche eine trichotomische Untergliederung von Objekten mit Relationszahl r = 0 ermöglichen

(Bense 1975, S. 65 ff.). Diese durch r = 0 gekennzeichneten Objekte bilden dann den „ontischen“ im Gegensatz zum „semiotischen Raum“ (mit $r > 1$):

ontischer Raum (oR) = $\{(x.y) \mid x = 0 \wedge y \in \{1, 2, 3\}$

semiotischer Raum (sR) = $\{(x.y) \mid x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\}$.

In polykontexturalen semiotischen Diamanten (Kaehr 2008, S. 46)

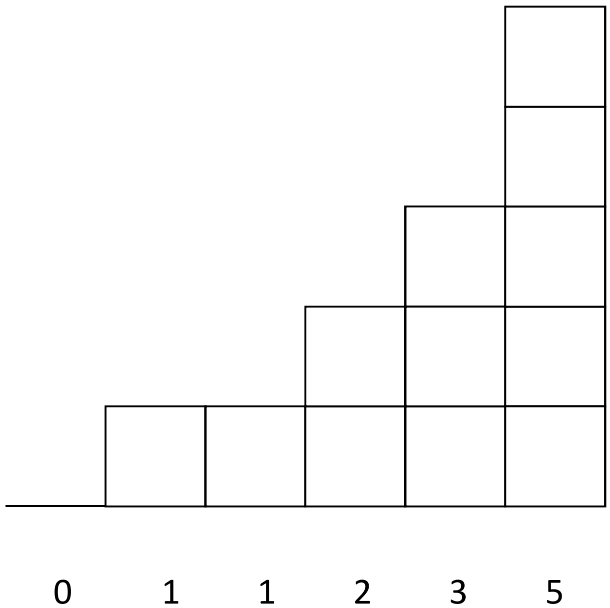
Diamond semiotics scheme, anchors omitted

$$\mathrm{Diam}(ZR) = \begin{pmatrix} \emptyset \mid \emptyset \\ A \mid a \\ A \Longrightarrow B \mid c \\ A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \mid b_2 \longleftarrow b_1 \\ A \Longrightarrow B \Longrightarrow C \Longrightarrow D \mid b_2 \longleftarrow b_1 \parallel c_2 \longleftarrow c_1 \end{pmatrix}$$

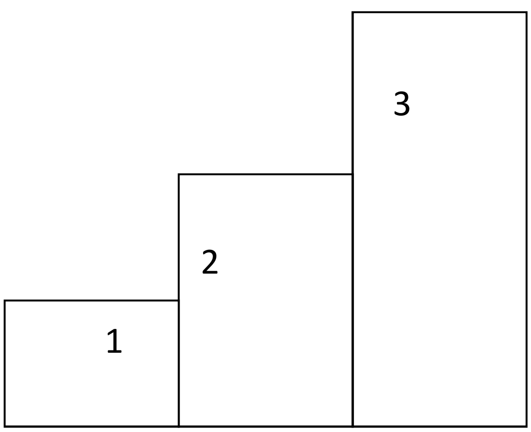
with the operators ops $= \{\Longrightarrow, \circ, \mid, \longleftarrow, \parallel\}$:
morphism $(\Longrightarrow)$, composition $(\circ)$, separation $(\mid)$,
hetero – morphism $(\longleftarrow)$, saltisition $(\parallel)$.

finden wir also die leere Menge durch sich selbst eingeführt, gefolgt von der monadischen Relation, wie oben gezeigt als Dublette eingeführt, und dann die dyadische, triadische und tetradische Relation.

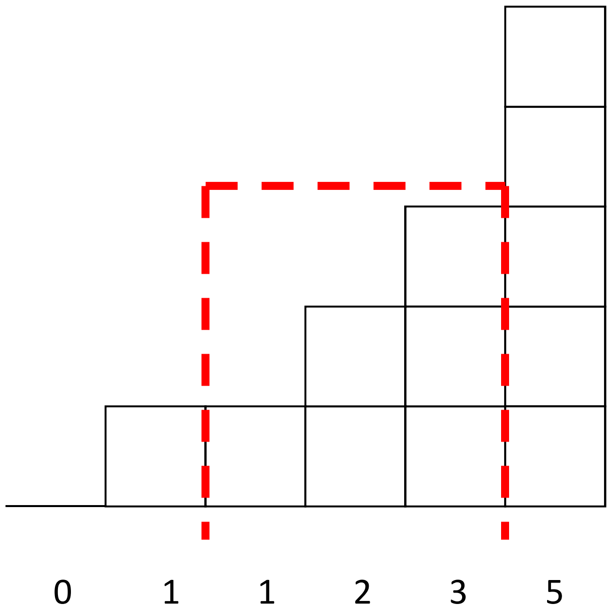
4. Auch wenn nun die Peircesche Semiotik auf Triaden beschränkt ist, ist es nun aber interessant, dass der 5-stufige Aufbau des Kaehr-Diamanten wiederum mit einer 5-Stufigkeit nicht der Peirce-Zahlen, sondern der Fibonacci-Zahlen korrespondiert:



Dagegen schaut die Struktur der Peirce-Zahlen, bei denen ja der Nachfolger der n-ten Zahl die Summe aller n Zahlen ist, wie folgt aus (Toth 2010):



Die Peirce-Zahlen nehmen also innerhalb der Fibonacci-Zahlen den folgenden Teilraum ein:



Nach PZ = FZ = 3 verändert sich aber das Verhältnis 1:1 zwischen Relationalzahl unhd Stufenzahl. Wir müssen aus diesem Gründe zusätzlich den Begriff der Stufenzahl (SZ) in die Semiotik einführen und verstehen darunter die Differenz

SZ =($\sum_{i=0}^{n} \sigma i$ - $\sum_{i=n-1}^{n} \sigma i$) .

Die Stufenzahl ist also der „Überschuss“ zwischen der Summe aller n Summanden und derjenigen nur der letzten beiden Summanden einer n-stelligen Relation. In der eingangs gegeben Progression der Fibonacci-Zahlen

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	$f_{...}$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1.597	2.584	4.181	6.765	10.946	17.711	28.657	46.368	...

sind die SZ also einfach die Differenz des Funktionsindexes und der Fibonacci-Zahl, d.h.

SZ = {0, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 6, 13, 25,45, 78, 132, ...}

Die durch die Differenz von n-stelliger Relation und n-ter Fibonacci -Zahl verursachten „Sprünge“ beginnen nun nach R = 3, d.h. die triadische Zeichenrelation ist die letzte, bei der Relations- und Fibonacci-Zahl noich übereinstimmen (d.h. SZ = 0 ist). Für R = 4 gibt es gar keine Fibonacci-Zahl, und für

R = 5,d.h. eine pentadische semiotische Relation, ist eine um den Wert 1 höhere Stufenzahl nötig, wie man am besten aus dem obigen Diagramm ersieht.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. In: ders., Diamond Semiotic Short, Studies. http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf (2008)

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Treppe,%20Esk.,%20Lift.pdf (2010)

Pathologische Dyaden

1. Die Menge der dyadischen Subzeichen der semiotischen 3×3 Matrix lässt sich in zwei Untermengen teilen;

1.1. in die Menge

(1.1)

(2.1), (2.2)

(3.1), (3.2), (3.3)

der valenztheoretisch korrekt gebildeten und in die Komplementärmenge

(1.2), (1.3)

(2.3)

der valenztheoretisch inkorrekt gebildeten „gebrochenen" Kategorien. (So kann z.B. in 2.1 eine Zweitheit eine Erstheit bilden, aber in der Konversen 1.2 kann eine Erstheit keine Zweitheit binden.)

2. Um dieses Problem zu lösen, wurden in Toth (2010) 3 Einbettungsgrade der trichotomischen Peirce-Zahlen eingeführt:

1. $\{X\{\_\__{.3}$

2. $\{X\{\ \{\_\__{.2}$

3. $\{X\{\{\{\_\__{.1}$,

ausgehend von der Überlegung, dass in der von Bense definierten verschachtelten Zeichenrelation

ZR = (M, ((M → O), (M → O → I))) ≌ {M, {{M, O}, {M, O, I}}}

die Erstheit auf einer Einbettungsebene (n-2), die Zweitheit auf einer Einbettungsebene (n-1) und die Erstheit sich auf der Einbettungsebene (n) befinden. Da hier eine Mengentheorie mit AFA (Anti-Foundation Axiom) vorliegt, kann man letzteres sehr bequem damit beweisen, dass in solchen Mengentheorie

$\Omega = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\}$

gilt. Es ist also in Sonderheit (a.a) = {a, a} = a, also die genuinen Subzeichen koinzidieren mit den entsprechenden Primzeichen (diese Tatsache wurde versteckt übrigens von Kaehr 2008 bei der Kontextuierung der Dyaden verwendet, indem „Primzeichen" dieselben Kontexturenzahlen bekommen wie die entsprechendne genuinen Subzeichen, d.h. identitiven Morphismen!).

3. Damit bekommen wir also „korrekt" gebildete gebrochene Kategorien, d.h. Dyaden der Form

(a.1) = {1, {{{1}}}}

(a.2) = {1, {{2}}}

(a.3) = {1, {3}},

abstrakt also das folgende Schema

(a.b) = $\{X, \{_3\ \{_2\ \{_1\ Y\ _1\}\ _2\}\ _3\}$ ($X \in$ tdP = {1., 2., 3.}, $Y \in$ ttP = {.1, .2, .3})

Somit können wir einige schöne, (vorerst?) nutzlose pathologische Dyaden dadurch konstruieren, dass wir die Koinzidenzen

3 ≡ {{{, 2 ≡ {{, 1 ≡ {

gegenseitig vertauschen:

Was für eine semiotische Bedeutung hätten pathologische Subzeichen wie

{3, {{1}}, {2, {{{3}}, {1{1}} ?

Immerhin scheint sich hier anzudeuten, dass „Spalten" bestehen zwischen den drei Fundamentalkategorien, dass diese somit nicht diskrete Punkte auf einem Zahlstrahl sind, sondern vielmehr in Intervallen zu liegen scheinen.

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html (2008)

Toth, Alfred, Pathologische Mengeninklusionen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Die Struktur von AFA-Zeichenklassen

1. Dass man die von Peirce relational und ordinal (logisch und mathematisch) eingeführte Definition des Zeichens auch mengentheoretisch fassen kann, ist natürlich alles andere als neu. Allerdings ist das Zeichen nicht einfach eine Menge, bestehend aus M, O und I oder aus {M}, {O} und {I}, sondern das Verhältnis von Ober- und Untermengen muss natürlich dem Inklusionsprinzip der relational-ordinalen Definition folgen, wie sie Bense (1979, S. 53) bisher am klarsten gegeben hatte:

$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))) \cong$

$ZR = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}\}$.

Wie man sieht, gibt es also in einer ZR drei mengentheoretische Einbettungs-ebenen:

1. $\{X\{\underline{\quad}_{.3}$

2. $\{X\{\ \{\underline{\quad}_{.2}$

3. $\{X\{\{\{\underline{\quad}_{.1}$,

und zwar für jede der drei trichotomischen Peirce-Zahlen eine, während die Position von X ($X \in \{1., 2., 3.\}$) jeweils für eine der drei triadischen Peirce-Zahlen reserviert ist.

2. Der Ausgangspunkt für diese, wie man sehen wird, sehr nützliche Unterscheidung liegt im Umstand, dass „gebrochene“ Kategorien (die durch kartesische Multiplikation „ganzer“ Kategorien entstehen), in jeglicher Beziehung fragwürdig sind. Während allerdings eine Teilmenge von ihnen

(1.1)

(2.1), (2.2)

(3.1), (3.2), (3.3),

also die Menge aller Subzeichen (a.b) mit b <= a, wenigstens valenztheoretisch korrekt gebildet sind (so kann z.B. in (3.1) die Drittheit eine Erstheit binden), sind die übrigen Subzeichen vollends unsinnig, denn z.B. wie sollte in (1.2) die Erstheit eine Zweitheit binden?

Man kann solche unsinnigen relationalen Bindungen allerdings dadurch „retten“, dass man, wie wir es oben taten, verschiedene Einbettungsebenen für die gebundenen trichotomischen Peirce-Zahlen annimt:

(a.1) = {1, {{{1}}}}

(a.2) = {1, {{2}}}

(a.3) = {1, {3}}

Genuine Subzeichen (identitive Morphismen) könnte man aber auch einfacher behandeln, vgl.

(1.1) = {1, 1}, (2.2) = {2, 2}, (3.3.) = {3, 3},

denn nach Aczels AFA (1988, S. 6) gilt

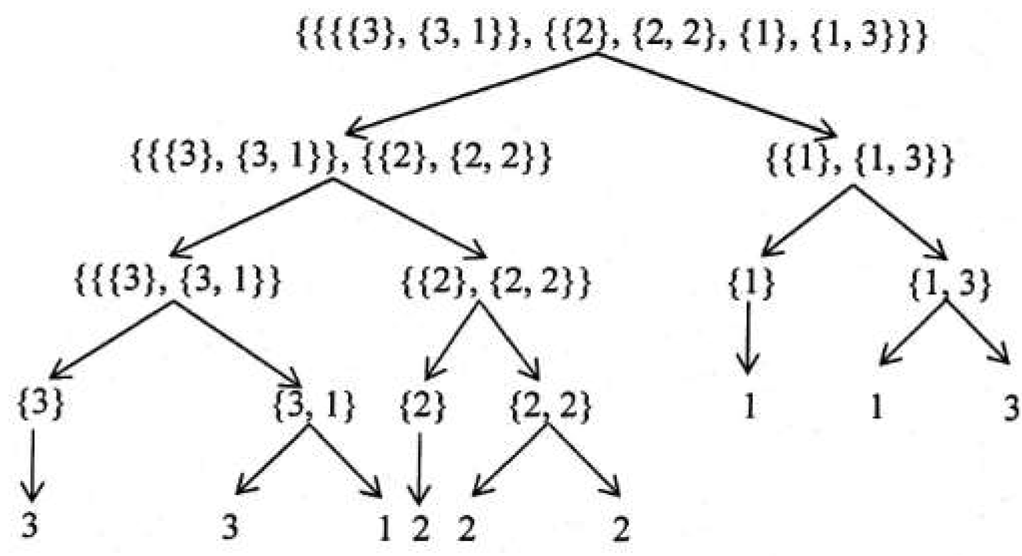
Ω = {Ω} = {Ω, Ω},

d.h. die im Zermelo-Fraenkelschen System (mit FA) paradoxe Menge, die sich selbt enthält, ist in einem AFA-System nicht nur existent, sondern sogar eindeutig bestimmt. Das bedeutet also

(1.1) = {1, 1} = {1},

und das ist ja gerade die genuine Erstheit (bzw. Zweitheit, Drittheit).

3. Wie bereits in Toth (2006, S. 19) gezeigt worden waren, wird eine Zeichenklasse wie z.B. (3.1 2.2 1.3) in einer mengentheoretischen Semiotik mit AFA anstatt FA wie folgt abgeleitet:



Damit ergeben sich als allgemeine zugrunde liegende Strukturen:

(1) für Zkln: (3.3.a 2.2.b 1.1.c)

(2) für Rthn: (c.11 b.2.2 a.3.3)

Berücksichtigen wir wieder die verschiedenen Einbettungsebenen, bekommen wir

(3) für die Triaden: $\{\{a\ \{_3\{_2\{_1\, b\ _1\}_2\}_3\}$

(4)für die Trichotomien: $\{\{b\ \{_1\{_2\{_3\, a\ _3\}_2\}_1\}$

Das Inklusionsgesetz der Linearität der Trichotomien lässt sich danach wie folgt formulieren:

ZR = $\{\{3\{_3\{_2\{_1\, a\ _1\}_2\}_3\}, 2\{_3\{_2\{_1\, b\ _1\}_2\}_3\}\ 2\{_3\{_2\{_1\, c\ _1\}_2\}_3\}$

mit $\{_3\{_2\{_1\, a\ _1\}_2\}_3\} \leq \{_3\{_2\{_1\, b\ _1\}_2\}_3\} \leq \{_3\{_2\{_1\, c\ _1\}_2\}_3\}$.

Bibliographie

Acel, Peter, Non well founded sets. Cambridge, 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl Klagenfurt 2008

„In der Semiotik muss man nur auf 3 zählen können“ (Max Bense)

1. Das Titelzitat stammt aus Benses letzter wöchtentlicher Vorlesung im Winter-Semester 1989/90 an der Universität Stuttgart und beeindruckte die beiden damals anwesenden Mathematiker, Günther Sigle und den Verfasser dieser Zeilen, einigermassen.

2. Tatsächlich hatte Bense (1980) die Fundamentalkategorien als „Primzeichen“-Relation

PZR = (1, 2, 3)

einführt. Allerdings steht hier die 1 für ^{1}R, die 2 für ^{2}R und die 3 für ^{3}R, so dass man also genauer schreiben sollte

PZR = ^{3}R(^{1}R, ^{2}R, ^{3}R),

zu lesen also: Die Primzeichen bilden eine triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation. Denn tatsächlich hatte Bense ja kurz zuvor das Verhältnis von (^{1}R, ^{2}R, ^{3}R) als „verschachtelte“ Relation wie folgt definiert (Bense 1979, S. 53):

ZR = (M, ((M → O), (M → O → I))).

Relational geschrieben ist das also

PZR = R(^{1}R, ((^{1}R → ^{2}R), (^{1}R → ^{2}R → ^{3}R))),

wobei die grosse Frage auftaucht, welche Valenz das initiale R vor der Klammer hat. 6? Oder 14?

3. Direkt mit der Valenz der übergeordneten, umfassenden Relationen verschachtelter Relationen hängen nämlich verschiedene mögliche Zähl- bzw. Zahlensysteme zusammen. Wir können z.B. zeigen, dass Benses Primzeichen-Relation PZR = (1, 2, 3), worin er die Relationen mit den ersten zwei Primzahlen sowie der 1 identifizierte (und später das Ordnungsprinzip analog dem Peanoschen Nachfolgeprinzip konstruieren wollte [Bense 1975, S. 171 ff., 1983, S. 192 ff.]) falsch ist, denn in der Semiotik wird einfach nicht 1, 2, 3 gezählt – obwohl es

gewissermassen richtig ist, zu sagen, in der Semiotik müsse man nur bis drei zählen können. Allerdings verlangt dieses Zählen bis zur 3 ein ganz anderes als normales Verständnis der mengentheoretischen Grundlagen der Semiotik.

Der Grund: Da

$^{1}R \subset {}^{2}R \subset {}^{3}R$

gilt, gilt auch:

$M \subset \{M\}$, $O \subset \{O\}$, $I \subset \{I\}$

und damit

$ZR \subset \{ZR\}$

und wegen $I = ZR$

$ZR = \{ZR\}$,

was zu Aczels Zirkelparadoxie führt (Aczel 1988, S. 6), falls wir nicht das Fundierungsaxiom ausschalten und sog. Mirimanoff-Folgen zu lassen, also das, was das berühmte Bild auf den „La vache qui rit“-Streichkäslein oder Mani Matters Lied „Bim Coiffeur“ beinhaltet. Klassisch, d.h. mit Fundierungsaxiom, gilt nämlich

$ZR \cup \{ZR\} = \emptyset$,

und wegen $ZR = \{ZR\}$ kämen wir dann nämlich zu

$ZR = \emptyset$,

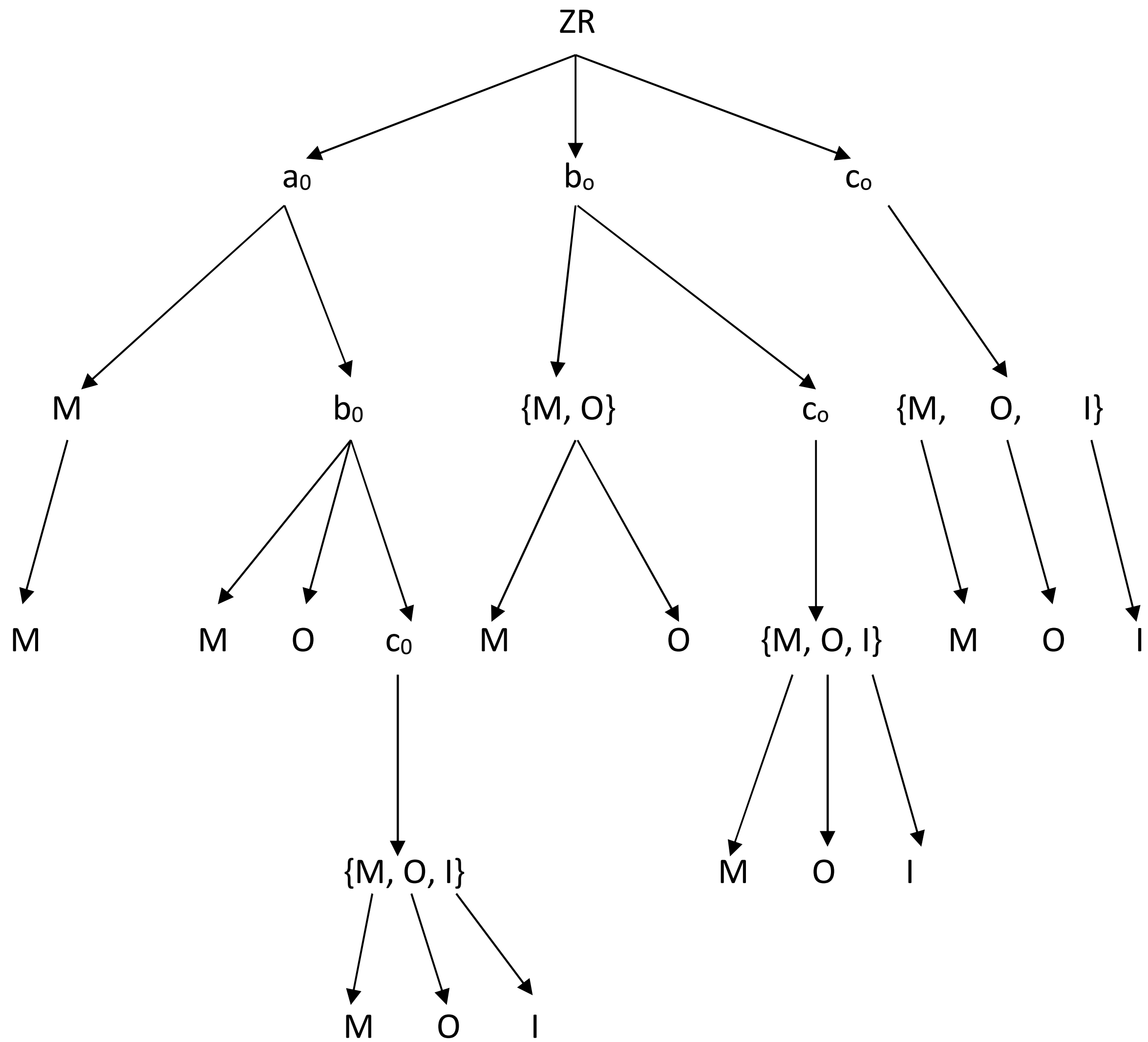
in Widerspruch zu PZR und ZR.

3. Während nämlich das Zählen bis 3 bei den Peano-Zahlen eine lineare Folge bildet:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$,

kann davon bei den verschachtelten Peirce-Zahlen, wie wir nun besser anstatt Primzeichen sagen, keine Rede sein:

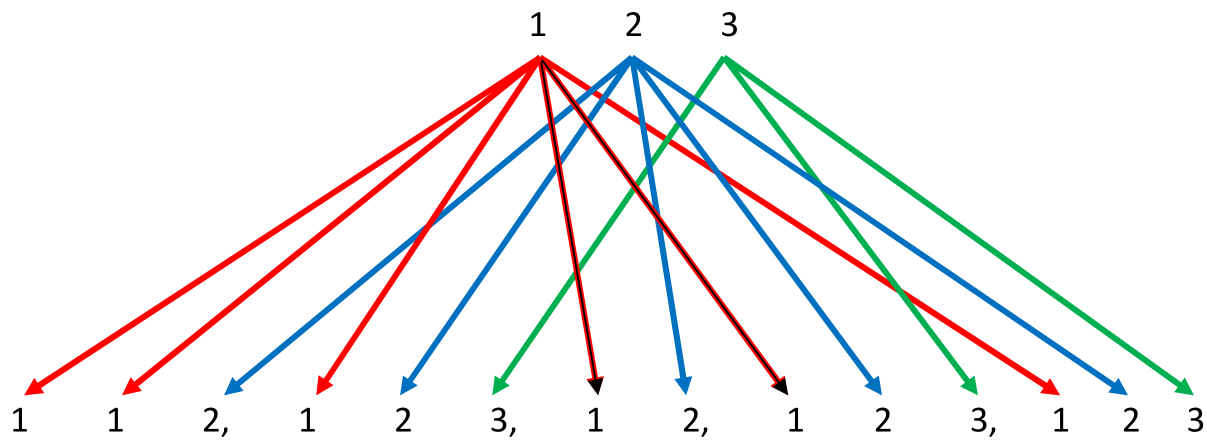
$ZR = \{a_0, b_0, c_0\}$, $a_0 = \{M, b_0\}$, $b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}$, $c_0 = \{M, O, I\}$:



Und die Zahlenfolge der Peirce-Zahlen lautet demgemäss:

112, 123, 12, 123, 123

Es werden also 14 Ziffern benötigt, um in einem Zahlensystem auf 3 zu zählen, in dessen mengentheoretischer Basis das Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungsaxiom ersesetzt ist. Die komplexe Beziehung zwischen den Peano- und den Peirce-Zahlen kann man z.B. wie folgt andeuten:



Bibliographie

Aczel, Peter, Non well founded sets. Cambridge 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden –Baden 1979

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Eine neue Betrachtung zu Peirce-Zahlen

1. Bekanntlich hatte Max Bense mehrfach versucht, die Isomorphie der Peano-Zahlen mit den sog. Primzeichen nachzuweisen (Bense 1975, S. 171 ff., 1983, S. 192 ff. [Peirce´s eigener Versuch, die natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion einzuführen], schliesslich Bense 1980 [Primzahlen, Primzeichen]). Ich hatte schon früh kritisiert, dass dies falsch sein muss, denn wir haben allein in der kleinen Matrix drei verschiedene Peirce-Zahlen, nämlich triadische, trichotomische und diagonale:

$$tdP =((1., 2., 3.), <)$$

$$ttP = (.1, .2, .3), \leq)$$

$$dgP = tdP \times ttP = ttP \times tdP = ((1.1, 2.2, 3.3, </>).$$

2. Nun lautet aber die Definition des Peirceschen Zeichens nach Bense (1979, S. 53):

$$ZR = (M,)(M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))),$$

d.h. ZR ist eine triadisch-verschachtelte Relation über einer monadischen, dyadischen und triadischen Relation und damit mengetheoretisch äquivalent mit

$$ZR = \{M, \{M, O\} , \{M, O, I\}\}$$

Nun ist aber

$$ZR = \{M, O, I\}$$

und damit gilt

$$ZR = \{ZR\} = \{ZR, ZR\}, \text{usw.},$$

d.h. es kann keine Isomorphie bestehen zwischen den Peano-Zahlen

$$\mathbb{P} = ((1, 2, 3, ...), <)$$

und den Peirce-Zahlen

$$ZR = \{1, \{1, 2\} , \{1, 2, 3\}\}.$$

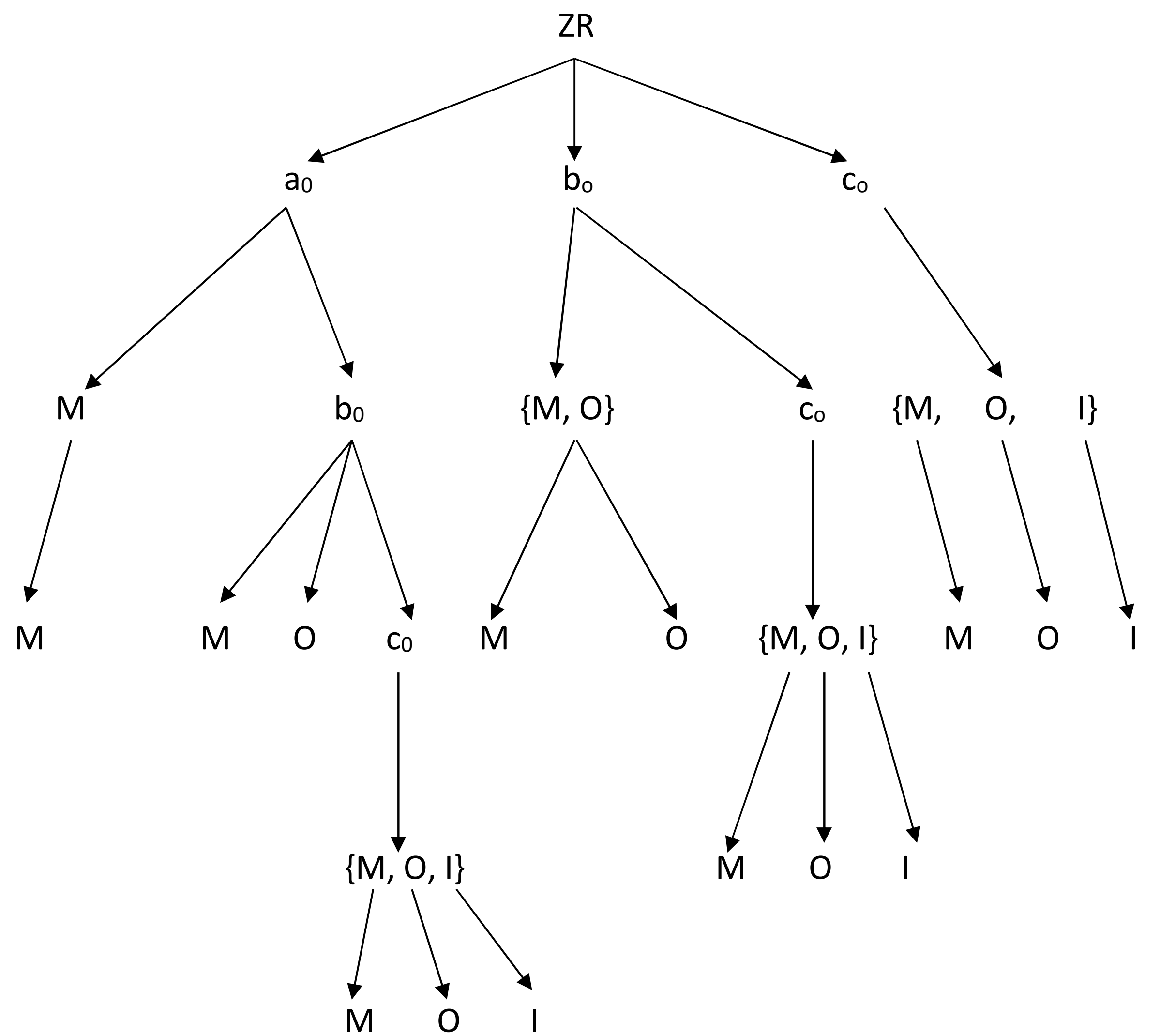
Weil ferner gilt

M = {M}, O = {O} sowie

$M \subset \{M, O\}$, $O \subset \{O, I\}$,

bekommen wir folgende Stammbaumableitung der Peirce-Zahlen:

ZR = $\{a_0, b_0, c_0\}$, $a_0 = \{M, b_0\}$, $b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}$, $c_0 = \{M, O, I\}$:



Und die Zahlenfolge der Peirce-Zahlen lautet demgemäss:

112, 123, 12, 123, 123

Es werden also 14 Ziffern benötigt, um in einem Zahlensystem auf 3 zu zählen, in dessen mengentheoretischer Basis das Fundierungsaxiom durch das Anti-

Fundierungsaxiom ersesetzt ist (Toth 2010, Aczel 1988). Dabei sieht die Verteilung der Anzahl Ziffern auf die Fundmentalkategorien M, O und I wie folgt aus:

ZR^3: M = 6, O = 5, I = 3.

Bei ZR^2 hatten wir gefunden (Toth 2010):

ZR^2: M = 3, O = 2, I = 0.

Wie man leicht zeigen kann, gilt allgemein

ZR^n: FK1 = n, FK2 = (n-1), FK3 = (n-2), ..., FKn =1,

wobei FK 1 = M, FK 2 = O, FK3 = I.

Dabei hat die Peirce-Zahlen-Folge für ZR^2 die Länge 7 (= 3 + 4), für ZR^3 die Länge 14 (= 6 + 5 + 3). Für ZR^4 würden es dann 21 sein. Allgemein gilt damit, dass eine n-adische Zeichenrelation eine Länge von (n-1) mal 7 Ziffern besitzt.

Bibliographie

Aczel, Peter, Non well founded sets. Cambridge 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden –Baden 1979

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, S. 287-294

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Die Peircesche Zeichenrelation und das Anti-Fundierungsaxiom. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Zwei Zählachsen trichotomischer Peirce-Zahlen in der Stratifikationsgrammatik

1. Die Stratifikationsgrammatik (SG) Lambs in einer ihrer frühesten Konzeptionen (Lamb 1966)

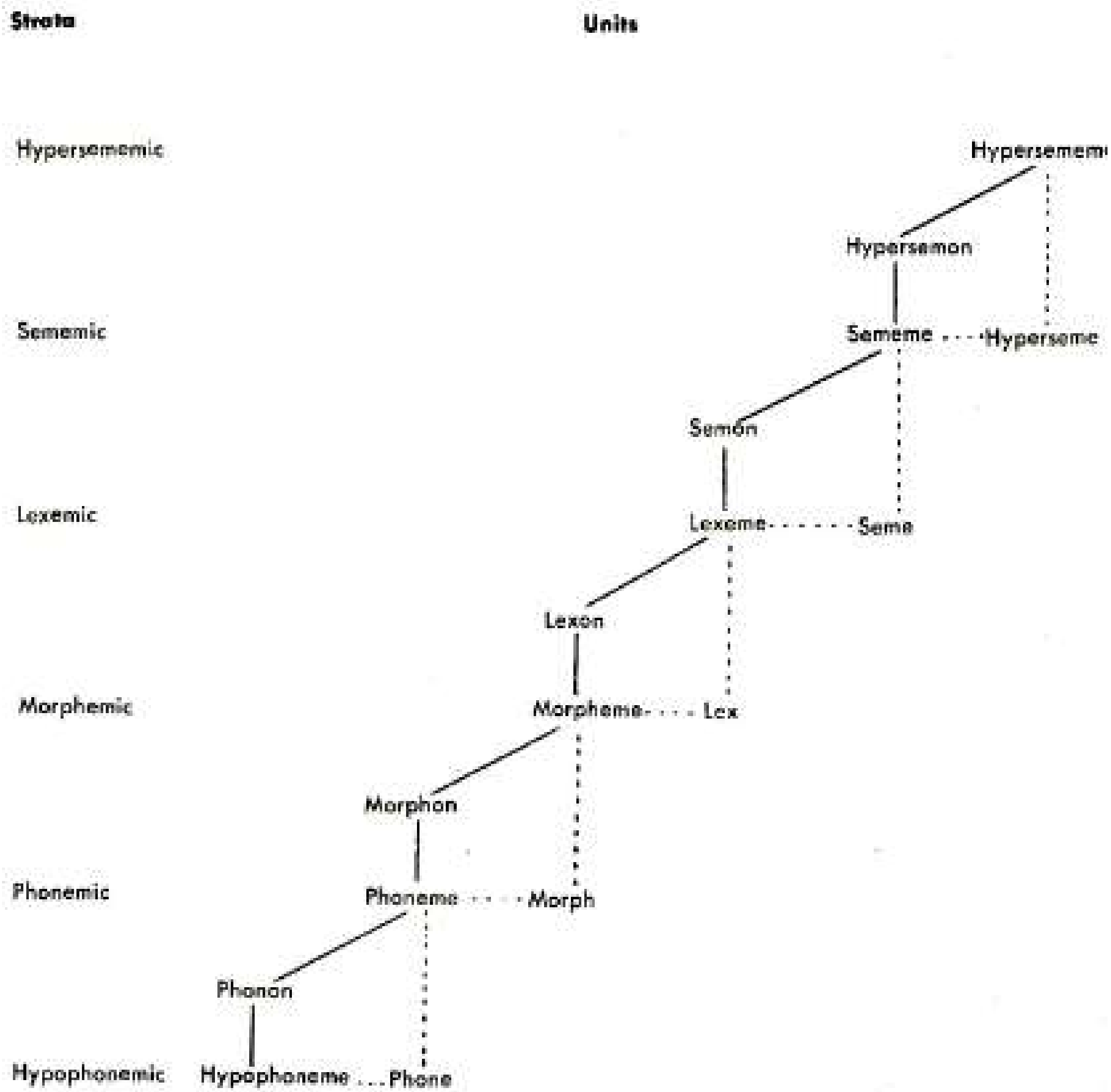


Figure 8. Some Units of Spoken Languages.

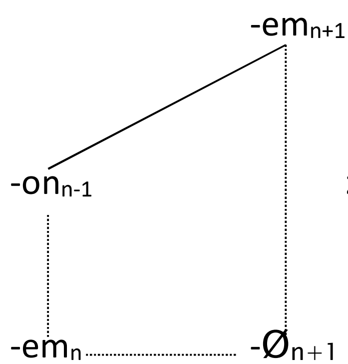
geht nicht von einem Dreierschritt grammatischer Entitäten

-Ø, -em (z.B. Phon – Phonem),

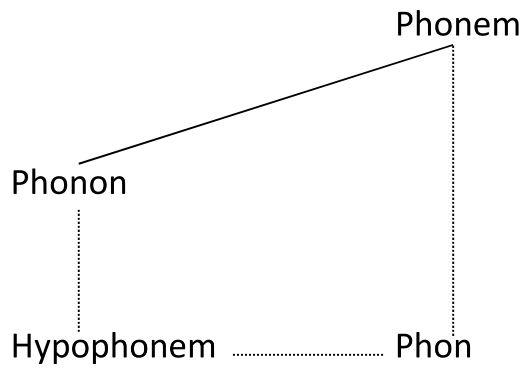
d.h. nicht von der binären Distinktion „etischer“ (Ø) und „emischer“ (funktioneller) Einheiten aus, sondern primär von einer ternären Distinktion

-Ø, -on, -em (z.B. Phon, Phonon, Phonem),

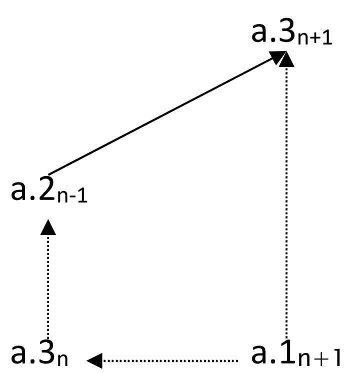
die aber sekundär transzendiert wird, insofern als die funktionelle Entität des nächsttieferen Stratums jeweils zusammen mit den Entitäten der ternären Relation zu einem quaternären Relation ergänzt wird:



z.B.



2. Da grammatische Einheiten auf der Subzeichenebene thematisiert werden können (vgl. Walther 1979, S. 100 f.), entspricht der blossen Qualität (Ø) natürlich eine trichotomische Erstheit, als Peirce-Zahl also (a.1), der –onischen Einheit als konkreter Realisation natürlich eine trichotomische Zweitheit, als Peirce-Zahl also (a.2), und der funktionellen Einheit (-em) eine trichotomische Drittheit, als Peirce-Zahl also (a.3). Damit korrespondiert das Schema der grammatischen Entittäten dem folgenden Schema trichotomischer Peirce-Zahlen:



Wir haben somit das folgende verdoppelte Zählschema in diesen quaternären Relationen:

tdP (1): $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow ...$

tdP(2): $1 \rightarrow 3 \quad\quad \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow ...$ (1 Stufe wird übersprungen)

Bibliographie

Lamb, Sydney, Outline of Stratificational Grammar. Washington D.C. 1966

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Ein zahlentheoretisches Zeichenmodell

1. Es ist eine bekannte Tatsache, dass die triadischen Peirce-Zeichen

tdP = (1, 2, 3),

wie Bense (1980) feststellte, als „Primzeichen“ dem Anfang der Subsequenz der Peano-Folge korrespondieren, es ist aber nie ausgedrückt worden, dass diese Subsequenz für die trichotomischen Peirce-Zahlen

ttP = (1, 1, 2, 1, 2, 3)

nicht gilt, denn sie werden durch die Ordnungsrelation

$a \leq b \leq c$

auf der Form der Zeichenklassen

(3.a 2.b 1.c)

gebildet. TdP haben also strikte, ttP aber nur schwache Inklusionsordnung, sie sind also ordnun gstheoretisch verschieden. Trotzdem scheint aber die strikte Inklusion oder Verschachtelung von tdP das Clou-Kennzeichen des Peirceschen Zeichenmodells zu sein, denn dieses stellt ja eine triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation dar (vgl. Bense 1979, S. 53, 67):

$ZR = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$.

Es folgt also, dass die ttP ebenfalls der strikten Inklusionsordnung unterworfen werden müssten, um zu einmen zahlentheoretisch einheitlichen Zeichenmodell zu kommen.

2. Wenn wir allerdings

$(a < b < c)$

für (3.a 2.b 1.c) setzen, dann kann man auf diesem Schema, wie man sofort erkennt, lediglich eine einzige im Peirceschen System der kleinen Matrix definierte Zeichenklasse

(3.1 2.2 1.3),

konstruieren. Es nützt uns nichts, dass diese eigenreale Zeichenklassen in mindestens einem Subzeichen mit jeder der übrigen 9 Peirceschen Zeichenklasse verknüpft ist, da diese zwar konstruktionell zugänglich, aber auf (a < b < c) nicht definierbar sind.

3. Wir können allerdings ausgehen von dem Schema der erweiterten Peirceschen Zeichenklasse

ZR* = (3.a 2.b 1.c) mit a < b < c

das wir nun verallgemeinern zu

ZR** = (X β^o Y α^o Z).

Die Morphismen β^o und α^o werden dann erweitert von (.3 → .2) < (.4 → .3) < (.5 → .4), allgemein von (M → (M-1)) bzw. von von (.2 → .1) < (.3 → .2) < (.4 → .3), allgemein von ((M-1) → (M-2)). Dann gilt also automatisch

X, Z, Y = σX, Z = $\sigma\sigma$X

und weil damit sowohl die triadische Grundstruktur von ZR und ZR* bewahrt als auch die strikte Inklusion von ZR* eingebaut ist, können wir nun theoretisch unendlich viele Zeichenklassen konstruieren, wobei das allgemeine Zeichenschema wie folgt aussieht:

ZR+ = (X, Y, Z) = (X, σX, $\sigma\sigma$X) := {{3, ..., n}, {2, ..., m}, {1, ..., o}}.

Das kann man aber auch so darstellen:

ZR+ = {{3, ..., n}, {2, ..., m}, {1, ..., o}} = {$\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$, $\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbb{N}$ }.

Dies bedeutet aber hinwiederum, dass es zu ZR+ eine komplementäre Relation CZR+ gibt mit

CZR+ = {{1}, {1, 2}}.

Dies ist aber mit dem Wienerschen Gesetz dasselbe wie

CZR+ = <1, 2>.

Aus CZR+ kann man nun die folgende Matrix bilden

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 \\ 2.1 & - \end{pmatrix}$$

die selbst eine Teilmatrix der in die triadische Peircesche 3×3-Matrix eingebetteten dyadischen Saussureschen Matrix ist, wobei allerdings der Index (2.2) fehlt.

Es scheint, dass man hiermitm ein interessantes semiotischen Gesetz gefunden hat. Was CZR+ allerdings wirklich ist und welche Konsequenzen es beim zahlentheoretischen Aufbau einer Semiotik hat, muss vorläufig offen bleiben.

Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Die Sonderstellung des Sinzeichens

1. Ein Subzeichen können bekanntlich entsprechend ihrer Triade oder Trichotomie als triadische (tdP) bzw. trichotomische Peirce-Zahlen (ttP) aufgefasst werden, deren Ordnungstypus verschieden ist (vgl. Toth 2009). Nimmt man nun zu jedem Subzeichen seine Konverse, erhält man für jedes x $\in$ (a.b) alle (a.b)´s, in denen x entweder $\in$ tdP oder $\in$ ttP ist:

Erstheiten: E = {1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1}

Zweitheiten: Z = {2.1, 2.2, 2.3, 1.2, 3.2}

Drittheiten: D = {3.1, 3.2, 3.3, 1.3, 2.3}.

Es handelt sich also bei E, Z, D um drei Mengen mit je 5 Elementen.

2. Diese x-heiten treten nun mit je verschiedener Wahrscheinlichkeit auf. Um die Wahrscheinlichkeit p(x) des Auftretens einer x-heit in einem Subzeichen (a.b) zu bestimmen, kann man nach Toth (2010) einfach den entsprechenden Prozentsatz bestimmen:

$p(x) = |a + b| / |x|$.

Z.B. ist also für x = 3 in (1.3) p(x) = 0.75, in (2.3) aber ist p(x) = 0.6.

3. Obwohl konverse Subzeichen die gleichen Wahrscheinlichkeiten haben (p(1.3) = p (3.1)),

M = [1/4, 1/3, 1/2, 2/3, ¾, 1] = [0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

O = [1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1] = [0.33, 0.4, 0.5, 0.66, 1]

I = [1/4, 3/5, ¾, 1] = [0.25, 0.6, 0.5, 0.66, 0.75, 1], nimmt jedoch unter den nicht-genuinen Subzeichen das Sinzeichen (1.2) eine Sonderstellung ein, wie man anhand der folgenden Ereignismatrix sehen kann:

I	0	0	0	3.3	3.2/ 2.3	0	3.1/ 1.3	3.3
O	0	1.2	2.3/ 3.2	2.2	0	2.1	0	2.2
M	3.1/ 1.3	2.1/ 1.2	0	1.1	0	0	0	1.1
	¼	1/3	2/5	½	3/5	2/3	¾	1

In E (M) gilt: $p(1.2_M) = p(2.1_M) = 0.333...$

$p(1.3_M) = p(3.1_M) = 0.25$

In Z (O) gilt: $p(2.3_O) = p(3.2_O) = 0.4$

In D (I) gilt: $p(3.1_I) = p(1.3_I) = 0.75$

$p(3.2_I) = p(2.3_I) = 0.6$

allerdings haben wir in Z (O):

$p(2.1_O) = 0.666...$, während $p(1.2_O) = 0.333...$. Das Sinzeichen ist somit von allen Subzeichen das einzige, deren genuine Ereigniswahrscheinlichkeit nicht mit derjenigen seiner Konversen übereinstimmt.

Bibliographie

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Gebrochene Kategorien und semiotische Wahrscheinlichkeiten. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Kann man die Peircezahlen mit Hilfe der surrealen Zahlen begründen?

1. Die sog. surrealen oder Conway-Zahlen wurden 1974 von John Horton Conway entdeckt bzw. erfunden. Sie basieren, grob gesagt, auf einer höchst zirkulären Definition und einer dadurch ermöglichten hochgradigen Komplexität, wie sie von der Einführung der nicht-surrealen (ganzen, rationalen, reellen usw.) Zahlen her ganz unbekannt ist. Tøndering (2005, S. 6) definiert sie wie folgt:

Definition: A surreal number is a pair of sets of previously created surreal numbers. The sets are known as the "left set" and the "right set". No number of the right set may be less than or equal to any member of the left set.

Es gilt:

1. Die erste surreal Zahl ist {Ø | Ø}. Dies wird kurz als {|} geschrieben. Es gilt also 0 ≡ {|}.

2. Entsprechend gilt

{0|} ≡ -1

{0} ≡ 1

Daraus kann man bereits 61 Kombinationen bilden! Von ihnen sind allerdings nur die folgenden 17 wohlgeformt sind (aus Tøndering 2005, S. 10):

{−1 | }, { | − 1},
{1 | }, { | 1},
{−1, 0 | }, {−1 | 0}, { | − 1, 0},
{0, 1 | }, {0 | 1}, { | 0, 1},
{−1, 1 | }, {−1 | 1}, { | − 1, 1},
{−1, 0, 1 | }, {−1, 0 | 1}, {−1 | 0, 1}, { | − 1, 0, 1}.

Entsprechend 1.2. definiert man

2 ≡ (1 |)

3 ≡ (2 |),

und man erhält auf diese Weise matürlich eine Abbildung der Peirce-Zahlen auf die surrealen Zahlen.

3. Nun sind die Subzeichen, wie bekannt, kartesische Produkte von tdP $\times$ ttP und somit „gemischte“, „gebrochene“ bzw. „inhomogene“ Kategorien wie MO, MI, IM, ... Die Anteile der Kategorien pro Subzeichen aus jedem der drei Bezüge

M = [1/4, 1/3, 1/2, 2/3, ¾, 1] = [0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

O = [1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1] = [0.33, 0.4, 0.5, 0.66, 1]

I = [1/4, 3/5, ¾, 1] = [0.25, 0.6, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

lassen sich nach Toth (2010) mit Hilfe der folgenden „Ereignismatrix“ bestimmen:

I	0	0	0	0	1	0	1	1
O	0	1	1	1	0	1	0	1
M	1	1	0	1	0	0	0	1
	¼	1/3	2/5	½	3/5	2/3	¾	1

Damit erhebt sich also die Frage, ob auch die rationalen semiotischen Zahlen ¼, 1/3, 2/5, ... auf die surrealen Zahlen abgebildet werden können. Tøndering (2005, S. 24) führte hierzu eine Funktion ein, die er sinnigerweise “Dali-Funktion” nannte und die folgende Abbildungen leistet:

$$\delta(x) = \begin{cases} \{\,|\,\} & \text{if } x = 0, \\ \{\delta(x-1)\,|\,\} & \text{if } x \text{ is an integer and } x > 0, \\ \{\,|\,\delta(x+1)\} & \text{if } x \text{ is an integer and } x < 0, \\ \{\delta(\frac{j-1}{2^k})\,|\,\delta(\frac{j+1}{2^k})\} & \text{if } x \text{ can be written as an irreducible fraction} \frac{j}{2^k}, \\ & \qquad \text{where } j \text{ and } k \text{ are integers, and } k > 0. \end{cases}$$

Einfach gesprochen, ist es ja so, dass mit Hilfe des „Rechts-Links"-Operators | nur Hälften hergestellt werden. Will man also auch Drittel, Viertel, Fünftel, so wählt man entsprechend den Exponenten k des Quotienten 2 der Dali-Funktion.

Die eigenartigen surrealen Zahlen eigenen sich also zur Begründung aller Peircezahlen, d.h. von tdP, ttP und dgP., wobei zur Herstellung der rationalen Zahlen der sog. Dali-Funktor verwendt wird.

Bibliographie

Conway, John H., On Numbers and Games. 2. Aufl. 2001

Tøndering, Claus, Surreal numbers. An introduction. o.O., 2005. In: http://www.tondering.dk/claus/sur15.pdf (2005)

Besetzungslücken in der semiotischen Ereignismatrix

1. Ein Primzeichen hat die allgemeine Form

PZ = (a.b),

worin a $\in$ tdP und b $\in$ ttP (triad., trich. Peirce-Zahlen). Will man somit alle Erst-, Zweit- und Drittheiten zusammenstellen, genügt es nicht, die entsprechenden Trichotomien zu nehmen, sondern sowohl a als auch b gleich dem entsprechenden Wert zu setzen. Man erhält so

an Erstheiten: E = {1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 3.1}

an Zweitheiten: Z = {2.1, 2.2, 2.3, 1.2, 3.2}

an Drittheiten: D = {3.1, 3.2, 3.3, 1.3, 2.3},

d.h. es gibt je 5 x-heiten mit x $\in$ {1, 2, 3} (unter Absehung der Differenz von tdP und ttP).

2. Diese x-heiten treten nun mit je verschiedener Wahrscheinlichkeit auf. Um die Wahrscheinlichkeit p(x) des Auftretens einer x-heit in einem Subzeichen (a.b) zu bestimmen, kann man einfach den entsprechenden Prozentsatz bestimmen:

$p(x) = |a + b| / |x|$.

Z.B. ist also für x = 3 in (1.3) p(x) = 0.75, in (2.3) aber ist p(x) = 0.6. Konverse Subzeichen haben die gleichen Wahrscheinlichkeiten.

3. Damit kann man nun natürlich Subzeichen über Intervallen von p(x) definieren. Wie allerdings bereits in Toth (2010) hingewiesen wurde, haben wir für die drei Bezüge drei verschiedene Intervalle.:

M = [1/4, 1/3, 1/2, 2/3, ¾, 1] = [0.25, 0.33, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

O = [1/3, 2/5, 1/2, 2/3, 1] = [0.33, 0.4, 0.5, 0.66, 1]

I = [1/4, 3/5, ¾, 1] = [0.25, 0.6, 0.5, 0.66, 0.75, 1]

I	0	0	0	0	1	0	1	1
O	0	1	1	1	0	1	0	1
M	1	1	0	1	0	0	0	1
	¼	1/3	2/5	½	3/5	2/3	¾	1

Wie man sieht, haben I_i, I_O und I_M nicht einmal die gleichen Anfangspunkte. Bei I_O z.B. würde man hoffen, dass es ein $x \in Z$ gäbe, so dass $p(x_Z) ǂ 0$. Die Hauptdiagonale der genuinen Kategorien (identitiven Morphismen) verfügt die Einheitlichkeit der Endpunkt der Intervalle = 1.

Wie man schnell erkennt, kann man z.B. für $p(x_{(1/3)})$ ein x = 3.6 ($3 \in$ tdP) und entsprechend für $p(x_{(2/3)})$ ein x = 6.3 ($3 \in$ ttP) konstruieren, d.h. das nächste zur „Schliessung" der Ereignislücke in Frage kommende Element statt aus den triadisch oder trichotomisch hexadischen Zeichen (vgl. Toth 2007, S. 176 ff.). Hingegen gibt es kein x für $p(x_{(2/5)})$ so dass entweder x = 3 $\in$ tdP oder $\in$ ttP. Die nächst kleinste Zahl, die eingesetzt werden könnte, ist x = 4.6, aber tdP stammt aus den tetradischen und ttP aus den hexadischen Zeichen. Bei Z kann man sich mit $p(x_{1/4})$ = 2.6 und $p(x_{3/4})$ = 6.2 behelfen, allein, $p(x_{3/5})$ ist wiederum nicht schliessbar. Bei E ist es sogar so, dass für keine der 4 (!) Ereignislücken eine künstliche Füllung konstruiert werden kann.

Bibliographie

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

Toth, Alfred, Gebrochene Kategorien und semiotische Wahrscheinlichkeiten. In: Eletronic Journal of Mathematical Semiotics (2010)

Die semiotischen Relationalzahlen

1. Im Rahmen seiner Einführung der „Primzeichen" hatte Bense festgehalten: „Man bemerkt leicht, dass damit die Kardinalzahl der fundamentalkategorialen Erstheit, die Ordinalzahl der fundamentalkategorialen Zweitheit und die Realtionalzahl der fundamentalkategorialen Drittheit angehört. Die zeichenanaloge triadische Relation der Zahl geht damit über in

ZaR = (Za(kard), Za(kard); Z(rel)).

2. Bense setzt hier voraus, dass der Zählprozess mit den Kardinalzahlen beginnt. Dagegen hatte schon 1932 der Mathematiker Baer bemerkt: : „Vom Zählen aus gesehen erscheint übrigens der Ordinalzahlbegriff als der Primäre; wir zählen ja zunächst: erstens, zweitens, ... siebentens, und erst ein Abstimmungsprozess führt dazu zu sagen: dieser Bereich enthält sieben Dinge" (1932, S. 115). Und genauso ist auch das Vorgehen in der Mengentheorie (vgl. z.B. Ebbinghaus 1994, S. 97 ff., 138 ff.), wo die Kardinalzahlen einfach als Äqivalenzklassen von Ordinalzahlen bestimmt werden.

3. Vom semiotischen Standpunkt aus muss jedoch festgehalten werden, dass die Menge der Ordinalzahlen {1., 2., 3., ..., n.} gegenüber der Menge der Kardinazahlen {1, 2, 3, ..., n} das Element der ordinalen Fixierung voraus hat, weshalb sie auf der Ebene der Repertoires als Sinzeichen (1.2) fungieren, während die Kardinalzahlen als Qualizeichen fungieren (1.1). So kommt also Bense zu folgendem Stufenbild der drei „zeichenanalogen" Zahlensysteme:

Kardinalzahl	$\subset$	Ordinalzahl	$\subset$	Relationenzahl
Za(.1.)	<	Za(.2.)	<	Za(.3.)

4. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass nicht nur der semiotische zahlen-theoretische Zugang für die Primordialität der Kardinalität spricht, sondern auch

das von Wiener (1914) entdeckte Gesetz, dass geordnete Mengen durch ungeordnete Mengen definiert werden können, deren Elemente wiederum ungeordnete Mengen sind:

(a, b) = {{a}, {a, b}}.

Dieses Gesetz hatte ich schon in meiner „Mathematischen Semiotik“ (2006, 2. Aufl. 2008, S. 15) benutzt, um die Peirce-Bensesche Primzeichen-Relation zu definieren

ZR = {Ø, { Ø}, {{ Ø}}} .

Allgemein erhält man (Wiener, Kuratowski):

$$\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 := \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 := \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&4 := \{0, 1, 2, 3\} \\
&\ldots \\
&n + 1 := n \cup \{n\}
\end{aligned}$$

D.h. Ordinalität kann allein durch Kardinlität definiert werden.

5. An dieser Stelle möchte ich als Parallele und Exkurs auf eine kürzlich erschienene Arbeit (Toth 2010) verweisen, in der ich den Versuch gemacht hatte, die Entstehung der Primzeichen aus den von Kaehr (2008) eingeführten Kontexturalzahlen zu bestimmen. Da die Semiose vom Objekt über disponible Relationen (vgl. Bense 1975, S. 65 f.) zum Zeichen führt, d.h. jedes Tripel

Σ = <Ω, DR, ZR>

erfüllt, kann man den Objekten die Kontexturalzahl 1

$\Omega \rightarrow$ K = 1,

den von ihnen auf die DR abgebildeten Präzeichen die Kontexturalzahl 2

($\Omega \rightarrow$ DR) $\rightarrow$ (K = 1) $\rightarrow$ (K = 2) und den von ihnen auf die ZR abgebildeten Zeichen die Kontexturalzahl 3 zuordnen

$(\Omega \rightarrow DR \rightarrow ZR) \rightarrow (K = 1) \rightarrow ((K = 2) \rightarrow (K = 3))$.

Die Abbildung der Kontexturalzahlen

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$

besitzt also genau die gleiche Ordnung wie die Primzeichen

$1 \subset 2 \subset 3$,

so dass also 1 in 2 und 1 und 2 in 3 enthalten sind.

6. Wenn wir die Ergebnisse der Kapitel 1-4 und des Exkurses 5 zusammennehmen, können wir sie im folgenden Bild skizzieren, in dem in der 1. Reihe die Elemente des semiotischen Tripels, in der 2. Reihe die Abbildung der Kontexturen auf die Fundamentalkategorien (bzw. Primzeichen) und in der 3. die „zeichenanalogen“ Zahlensysteme stehen:

OR_1	$(K = 1) \rightarrow M$	Za(kard)
$DR_{1,2}$	$(K = 1 \rightarrow K = 2) \rightarrow M \rightarrow O$	Za(ord)
$ZR_{1,2,3}$	$((K = 1 \rightarrow K = 2) \rightarrow K = 3) \rightarrow (M \rightarrow O) \rightarrow I$	Za(rel)

Von hier aus ergibt sich aber im Hinblick auf die den zeichenanalogen Zahlensystemen zuzuordnenden Zahlenwissenschaften ein interessantes Ergebnis: Offenbar ist Za(kard) die Charakteristik der reinen Mathematik, die mit bedeutungs- und sinnfreien Tokens rechnet, wo man, nach einem bekannten Bonmot von Bernays, ja auch anstatt Zahlen Bierseidel nehmen könne. Völlig ausser Zweifel steht, dass Za(rel) die Charakteristik der Semiotik ist, wo sowohl mit Bedeutung als auch mit Sinn gerechnet wird. Es bleibt damit die Bestimmung von Za(ord), und da die dritte der drei Zahlenwissenschaften die Logik ist, darf man versuchen, sie durch Za(ord) zu charakerisieren. Dafür spricht nicht nur die bekannte Tatsache, dass die moderne Logik mit Hilfe der Mengenlehre formalisierbar ist, was bekanntlich so weit geht, dass zwischen beiden Disziplinen praktisch kein Unterschied mehr besteht (Ebbinghaus 1994), sondern auch, dass die Logik im Gegensatz zur Mathematik neben den Zeichentokens $M \in \{M_I\}$ auch die Objektbezüge benötigt, um die Wahrheit all derjenigen Aussagen zu bestimmen, die nicht-trivial, d.h. nicht logisch notwendig ist. Da die Logik mit zwei Basiswerten arbeitet, 0 und 1, setzt sie zur Bestimmung ihrer Wahrheitswertfunktionentabellen die Abbildungen zwischen 0 und 1 voraus, d.h. ein ganz spezififsches Ordnungsschema. So ist etwa die Zahlenfolge 1000 nicht einfach = 1000, sondern rekurriert auf den Objektbezug „Konjunktion“, während die Zahlenfolge 1110 nicht einfach = 1110 ist, sondern auf den Objektbezug „Disjunktion" referiert. Etnsprechend kann man aus den zwei Kardinalzahlen 0 und 1 (oder irgendwelchen) durch Wertbelegung die logischen Werte erzeugen und somit die Logik aus der Mathematik ableiten, aber das Umgekehrte, die Ableitung der Peano-Zahlen aus zwei logischen Werte 0 und 1, ist natürlich ganz ausgeschlossen und damit auch die Ableitung der Mathematik aus der Logik. Hingegen dürfte es möglich sein, sowohl die Mathematik als auch die Logik aus der Semiotik abzuleiten, da die Relationalzahlen die Obermengen der Kardinal- und Ordinalzahlen bilden. Man darf sich kaum vorstellen, wieviel Arbeit auf diesem Gebiet noch zu tun verbleibt.

Bibliographie

Baer, Reinhold, Hegel und die Mathematik. I: Verhandlungen des Zweitens Hegelkongresses 1931 in Berlin, ed. B. Wigersma. Berlin 1932, S. 104-120

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Einführung in die Mengenlehre. 3. Aufl. Mannheim 1994

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html (2008)

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Die Entstehung der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Entst.%20Peirce-Zahlen.pdf (2010)

Wiener, Norbert, A simplification of the logic of relations. In: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 17, 914, S. 387-390

Das Primordiat der Zahlen vor den Ideen

1. Nach Bense (1975, S. 16) ist das Zeichen eine Funktion zwischen Welt und Bewusstein:

ZR = f(Ω, β),

Nach Toth lassen die die Bewusstseinsrelation

BR = (י, ו, מ)

und die Objektrelation

OR = ($\mathcal{M}$, Ω, $\mathcal{I}$)

wie folgt definieren:

ZR = f(OR, BR)

OR = f(ZR, BR)

BR = f(OR, ZR).

Nachdem wir zuletzt in Toth (2010) die verschiedenen Arten von Peirce-Zahlen untersucht hatten, kamen wir zum Schluss, dass der semiotische Zeichenbegriff ein quali-quantitativer sowie quanti-qualitativer Zahlenbegriff ist, dass also dem dem Zeichen auf jeden Fall der Zahlbegriff inhäriert. Im Anschluss an Oehler (1965) stellt sich damit erneut die Frage, ob die Zahl vor der Idee kommt oder ob sie die Idee bereits voraussetzt.

2. Die vollständige 9 × 9 Matrix sieht wie folgt aus:

	𝑚	Ω	𝒥	מ	ו	י	M	O	I
𝑚	𝑚 𝑚	𝑚 Ω	𝑚 𝒥	𝑚מ	𝑚ו	𝑚י	𝑚 M	𝑚 O	𝑚 I
Ω	Ω 𝑚	Ω Ω	Ω 𝒥	Ωמ	Ωו	Ωי	Ω M	Ω O	Ω I
𝒥	𝒥 𝑚	𝒥 Ω	𝒥 𝒥	𝒥מ	𝒥ו	𝒥י	𝒥 M	𝒥 O	𝒥 I
מ	מ 𝑚	מ Ω	מ 𝒥	מ מ	מ ו	מ י	Mמ	Oמ	I מ
ו	ו 𝑚	ו Ω	ו 𝒥	ומ	וו	וי	Mו	Oו	Iו
י	י 𝑚	י Ω	י 𝒥	ימ	יו	יי	Mי	Oי	I
M	M𝑚	MΩ	M𝒥	Mמ	וM	יM	MM	MO	MI
O	O𝑚	OΩ	O𝒥	Oמ	וM	יM	MM	MO	MI
I	I𝑚	IΩ	I𝒥	Iמ	וI	יI	MI	OI	II

In dieser Matrix befinden sich also sämtliche kombinatorisch möglichen Subzeichen als kartesische Produkte ∈ OR, BR, ZR. Da die Zeichen aus aus je 3 nicht-identischen Paaren aus OR, BR, ZR gemäss dem bei Walther (1979, S. 79) angegebene Verfahren zusammengesetzt sind, muss der Zahlbegriff also bereits den Dyaden inhärieren. Da anderseits die Zeichengenese auf der Stufe OR erfolgt, inhäriert der Zahlbegriff somit bereits den kategorialen Objekten an, und zwar, wie es Götz vorgeschlagen hatte, durch die präsemiotische Trichotomie Sekanz, Semanz, Selekanz. Da eine Idee auf einer höheren als der Objektebene entsteht, folgt allerdings, dass die Zahl der Idee primordial ist, d.h. die Idee setzt die Zahl, und zwar die quanti-qualitative/quali-quantitative Zahl voraus und ist aus ihr zusammengesetzt.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Oehler, Klaus, Der entmythologisierte Platon. Zur Lage der Platonforschung. In: Zeitschrift für Philosophische Forschung 19, 1965, S. 393-420

Toth, Alfred, Calculus semioticus. In: Kongresspublikation "Calculemus", Hamburg, Juli 2010

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Calculus semioticus: Was zählt die Semiotik?

> O mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos vivantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante. J'aspirais instinctivement, dès le berceau, à boire à votre source, plus ancienne que le soleil, et je continue encore de fouler le parvis sacré de votre temple solennel, moi, le plus fidèle de vos initiés. Il y avait du vague dans mon esprit, un je ne sais quoi épais comme de la fumée; mais, je sus franchir religieusement les degrés qui mènent à votre autel, et vous avez chassé ce voile obscur, comme le vent chasse le damier. Vous avez mis, à la place, une froideur excessive, une prudence consommée et une logique implacable. A l'aide de votre lait fortifiant, mon intelligence s'est rapidement développée, et a pris des proportions immenses, au milieu de cette clarté ravissante dont vous faites présent, avec prodigalité, à ceux qui vous aiment d'un sincère amour. Arithmétique! algèbre! géométrie! trinité grandiose! triangle lumineux! Celui qui ne vous a pas connues est un insensé!
>
> *Comte de Lautréamont, Les Chants de Maldoror* II, 10

Vorbemerkung: Dieser Text ist Teil einer grossangelegten Untersuchung, mit der nicht nur gezeigt werden soll, dass die Semiotik formalisierbar ist, da sie auf einem ordinalen und d.h. mathematischen und logischen Zeichenbegriff definiert ist, sondern mit der vor allem herausgestellt werden soll, dass die Semiotik, neben Mathematik und Logik, die zentrale von drei „Zählwissenschaften" ist, die nach einem Vorschlag R. Kaehrs (2009) innerhalb der „Graphematik" behandelt werden können.

1. Peirce-Zahlen-Arithmetik ohne Null

Bereits in Toth (2009) wurde darauf hingewiesen, dass wir innerhalb von Zeichenklassen und ihren dualen Realitätsthematiken zwei verschiedene Arten von Ordnungstypen innerhalb der von Bense so genannten Primzeichen (Bense 1980) oder der von mir sogenannten Peirce-Zahlen antreffen. Wenn man sich vergegenwärtigt, dass die triadische Peircesche Zeichenrelation das folgende Ordnungsschema aufweist (vgl. Bense 1979, S. 67):

ZR(td.) = ((M) $\rightarrow$ ((M $\rightarrow$ O) $\rightarrow$ (M $\rightarrow$ O $\rightarrow$ I))) = (1 $\rightarrow$ (2 $\rightarrow$ 3)),

während die trichotomische Zeichenrelation einer allgemeinen Zeichenklasse

Zkl = (3.a 2.b 1.c)

die Ordnung (a $\leq$ b $\leq$ c) aufweist, so steht also die irreflexive und asymmetrische Ordnung der triadischen Peirce-Zeichen (tdP) der reflexiven und symmetrischen Ordnung der trichotomischen Peirce-Zeichen (ttP) gegenüber:

td$\mathbb{P}$ = (<, $\mathbb{N}$)

tt$\mathbb{P}$ = ($\leq$, $\mathbb{N}$).

Dennoch fallen aber beiden „Ordnungstypen“ (Hausdorff) der Peirce-Zeichen insofern aus dem Rahmen, als die üblichen arithmetischen Operationen über $\mathbb{N}$

1 + 1 = 2

1 + 2 = 3 = 2 + 1, usw.

semiotisch sinnlos sind, da man nicht einfach zwei Mittelbezüge addieren kann, um etwas ganz anderes, d.h. einen Objektbezug zu erhalten, oder einen Objekt- und einen Mittelbezug addieren kann, um einen Interpretantenbezug zu bekommen, usw.

Trotzdem wissen wir seit Beckmann, Berger, Walther (1979, S. 135 ff.) und Toth (2008), dass die zehn Peirceschen Zeichenklassen einen Verband definieren und dass daher die folgenden verbandstheoretischen (booleschen) Operationen funktionieren:

1 $\sqcap$ 1 = 1

1 $\sqcap$ 2 = 1 = 2 $\sqcap$ 1

$1 \sqcap 3 = 1 = 3 \sqcap 1$

$1 \sqcup 1 = 1$

$1 \sqcup 2 = 2 = 2 \sqcup 1$

$1 \sqcup 3 = 3 = 3 \sqcup 1$

Damit kann man natürlich auch die beiden Peirce-Zahlen wie folgt notieren:

$td\mathbb{P} \quad = (1 \sqsubset 2 \sqsubset 3)$ bzw. $\times(Td\mathbb{P}) = (3 \sqsupset 2 \sqsupset 1)$

$tt\mathbb{P} \quad = (1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3)$ bzw. $\times(Tt\mathbb{P}) = (3 \sqsupseteq 2 \sqsupseteq 1)$

Dennoch ist es mit Hilfe der für Peirce-Zahlen gültigen Operationen unmöglich, von einer Erstheit zu einer Zweitheit oder Drittheit oder von einer Zweitheit zu einer Drittheit (und jeweils umgekehrt) zu gelangen. Bense hatte sich schon sehr früh damit beholfen, dass er – wohl in Voraussicht auf die Unterscheidung von zwei Ordnungstypen der Peirce-Zeichen – zwischen „koordinativen" und „selektiven" generativ-semiosischen sowie degenerativ-retrosemiosischen Operationen unterschieden hatte (vgl. Toth 2008, S. 13). Koordination ist also jene Operation, welche die Sukzession $\sigma(n) = n + 1$ für jede triadische Peirce-Zahl n, beginnend mit $n = 1$ liefert. Da das Nullzeichen original aber nicht definiert ist in der triadischen Peirceschen Zeichenrelation, kann 1 selbst nicht hergestellt, sondern muss „thetisch eingeführt" werden, d.h. es muss eine gesonderte Operation angenommen werden (vgl. Toth 2008, S. 15). Da für die Koordinationsoperation seit Bense das Zeichen $\mapsto$ verwendet wird, haben wir also

$ZR = 1. \mapsto 2. \mapsto 3.$, bzw.

$td\mathbb{P} = (\mapsto, \mathbb{N})$

Für die Selektionsoperation verwendet Bense leider das irreleitende Zeichen >, das, wie oben gezeigt, dasselbe wie $\leq$ bedeutet:

$ZR = .1 > .2 > .3$

tdℙ = (>, ℕ).

Die Unterscheidung zwischen „Koordination“ und „Selektion“ (auch wenn diese Begriffe mathematisch nichtssagend sind) ist wichtig, um es nochmals hervorzuheben, denn die lineare Progression der der Triaden ist ja wie folgt

tdℙ = 1 ↦ 2 ↦ 3 ↦ ...

während diejenige der Trichotomien wie folgt ist

$$\mathrm{tt}\mathbb{P} = \begin{cases} 1 > 1 \,/\, 1 > 2 \,/\, 1 > 3 \\ 2 > 2 \,/\, 2 > 3 \\ 3 > 3 \end{cases}$$

Man würde also besser z.B. die Zeichen ↱ und |↱ wählen, um mit ersterer die Progression der tdℙ und mit letzterer diejenige der ttℙ zu bezeichnen:

ZR = 1. ↱ 2. ↱ 3., bzw.

tdℙ = (↱, ℕ)

ZR = 1. |↱ 2. |↱ 3., bzw.

ttℙ = (|↱, ℕ)

Wenn Bense also, wie er dies an mehreren Stellen tat, z.B. in (1979, S. 45; 1981, S. 39) das Nachfolger-Ordnungsprinzip der Peanozahlen

1, 2, 3, ...

1, 11, 111, ...

mit denjenigen der Primzeichen (1975, S. 167 ff.) gleichsetzte (vgl. auch 1983, S. 192 ff.), dann ist das 1. falsch – denn es gibt ja – wie oben gezeigt, keine Operation, um durch Addition von Monaden Dyaden oder von Monaden und Dyaden Triaden zu erzeugen, und 2. vergisst Bense zu sagen und zu begründen, dass die von ihm eher provisorisch eingeführten Operationen Koordination und Selektion im Gegensatz zu den rein quantitativen verbandstheoretischen Operationen QUALITATIV sind. D.h. (polykontextural-) arithmetische Operationen wie

M + M = ?	1 + 1 = ?
O + O = ?	2 + 2 = ?
I + I = ?	3 + 3 = ?
M + M + M = ?	1 + 1 + 1 = ?
M + O = ?	1 + 2 = ?
O + I = ?	2 + 3 = ?

involvieren jenen „qualitativen Sprung“, von dem Kierkegaard gesprochen hatte: “Die Sünde kommt also hinein als das Plötzliche, d.h. durch einen Sprung; aber dieser Sprung setzt zugleich die Qualität; doch indem die Qualität gesetzt ist, ist im selben Augenblick der Sprung in die Qualität hineinverflochten und von der Qualität vorausgesetzt und die Qualität vom Sprunge” (1984, S. 32). Kurz gesagt: Die Semiotik besteht aus zwei Zahlensorten:

td$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ und td$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$,

aus den quantitativen booleschen Operatoren

$\sqcap$, $\sqcup$, $\sqsubset$, $\sqsupset$, $=$,

sowie aus den qualitativen Operatoren

↱, |↱

und ist damit einmal mehr als ein quantitativ-qualitatives Teilgebiet der Mathematik nachgewiesen.

2. Peirce-Zahlen-Arithmetik mit Null

Das Zeichen wird wie folgt definiert (vgl. z.B. Bense 1967, S. 9)

$ZR = \{M, O, I\}$.

Da man über jeder Menge ihre Potenzmenge bilden kann, bekommen wir

$\wp ZR = \{\{M\}, \{O\}, \{I\}, \{M, O\}, \{O, I\}, \{M, I\}, \{M, O, I\}, \varnothing\}$,

weshalb wir erneut definieren können

$ZR+ = \{M, O, I, \varnothing\}$.

Da nach Bense (1979, S. 67)

$ZR(td) = (1. \rightarrow 2. \rightarrow 3.) \equiv (1 \subset 2 \subset 3)$ bzw.

$ZR(td, \varnothing) = (0. \rightarrow 1. \rightarrow 2. \rightarrow 3.) \equiv (O \subset 1 \subset 2 \subset 3)$

und z.B. nach Walther (1979, S. 79) gilt

$ZR(tt) = (.1 \leq .2 \leq .3) \equiv (.1 \subseteq .2 \subseteq .3)$ bzw.

$ZR(tt, \varnothing) = (.0 \leq .1 \leq .2 \leq .3) \equiv (.0 \subseteq .1 \subseteq .2 \subseteq .3)$,

haben wir zwei semiotische Zahlensysteme, die wir (um die Null) erweiterte Peirce-Zahlen nennen, bzw. ein semiotisches Zahlensystem mit zwei Ordnungstypen

$td\mathbb{P} \subset \mathbb{N} = (\{1, 2, 3\}; \subset)$ bzw. $td\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\}; \subset)$ bzw.

$tt\mathbb{P} \subset \mathbb{N} = (\{1, 2, 3\}; \subseteq)$ bzw. $tt\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\}; \subseteq)$.

Nach Beckmann ap. Walther (1979, S. 135 ff.) gelten sowohl für $td\mathbb{P}$ als auch für $tt\mathbb{P}$ die verbandstheoretischen (booleschen) Operationen: $\sqcap$, $\sqcup$, $\sqsubset$, $\sqsupset$, $=$:

$0 \sqcap 0 = 0$, $1 \sqcap 1 = 1$, $2 \sqcap 2 = 2$, $3 \sqcap 3 = 3$

$0 \sqcap 2 = 0 = 2 \sqcap 0$

$1 \sqcap 2 = 1 = 2 \sqcap 1$

$1 \sqcap 3 = 1 = 3 \sqcap 1$

$0 \sqcup 0 = 0,\ 1 \sqcup 1 = 1,\ 2 \sqcup 2 = 2,\ 3 \sqcup 3 = 3$

$0 \sqcup 2 = 0 = 2 \sqcup 0$

$1 \sqcup 2 = 2 = 2 \sqcup 1$

$1 \sqcup 3 = 3 = 3 \sqcup 1$

Damit kann man die beiden erweiterten Peirce-Zahlen wie folgt notieren:

$\text{td}\mathbb{P} = (0 \sqsubset 1 \sqsubset 2 \sqsubset 3)$ bzw. $\times(\text{Td}\mathbb{P}) = (3 \sqsupset 2 \sqsupset 1 \sqsupset 0)$

$\text{tt}\mathbb{P} = (0 \sqsubset 1 \sqsubseteq 2 \sqsubseteq 3)$ bzw. $\times(\text{Tt}\mathbb{P}) = (3 \sqsupseteq 2 \sqsupseteq 1 \sqsupseteq 0)$

Ferner gelten nach Toth (oben, Abschnitt 1) die beiden qualitativen Operatoren

$\Rsh,\ |\Rsh,$

nämlich

$\text{td}\mathbb{P} = (0 \Rsh 1 \Rsh 2 \Rsh 3)$

$$\text{tt}\mathbb{P} = \begin{cases} 0 \,\|\, 0 \,/\, 0 \Rsh 1 \,/\, 0 \Rsh 2 \,/\, 0 \Rsh 3 \\ 1 \,\|\, 1 \,/\, 1 \Rsh 2 \,/\, 1 \Rsh\Rsh 3 \\ 2 \,\|\, 2 \,/\, 2 \Rsh 3 \\ 3 \,\|\, 3, \end{cases}$$

so dass wir also die Ordnungsstrukturen wie folgt vervollständigen können:

$$\text{td}\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \cup 0; \subset, \Rsh)$$

$$\text{tt}\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \cup 0 = (\{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N} \cup 0; \subseteq, |\Rsh)$$

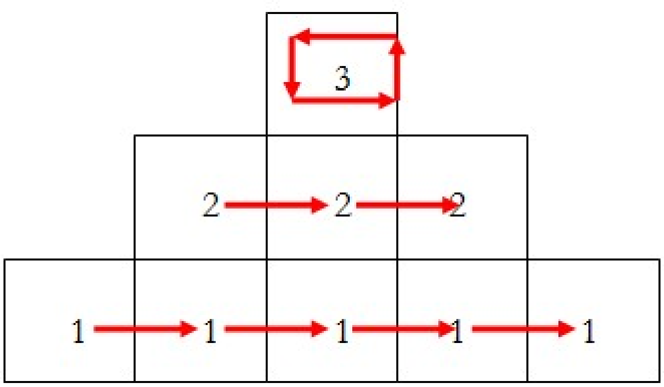
Die hier kurz skizzierte quantitativ-qualitative erweiterte Peirce-Zahlen-Arithmetik kann man gut mit Hilfe des in Toth (2009) eingeführten Treppenmodells, eines flächigen Zahlenschemas, darstellen. Zur Illustration beschränken uns hier auf ZR, da ZR+ leicht selbst gezeichnet werden kann. Z.B entspricht die rot ausgezogene Zählrichtung den folgenden Additionen:

M + M = ?		1 + 1 = ?

O + O = ?		2 + 2 = ?

I + I = ?		3 + 3 = ?

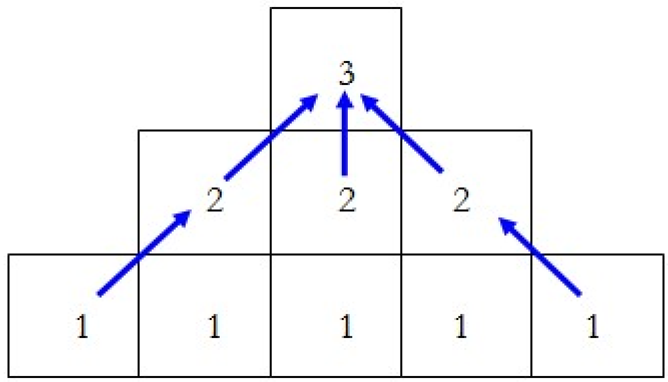
M + M + M = ?	1 + 1 + 1 = ?



Blau ausgezogen sind im folgenden die Operationen mit Kontexturüberschreitungen, d.h. sobald die 2. Dimension des Treppenschemas benutzt werden muss:

M + O = ?		1 + 2 = ?

O + I = ?		2 + 3 = ?



3. Mediation von Peirce-Zahlen

Die Semiotik beruht auf 3 Zahlentypen, die weder rein quantitativ noch rein qualitativ sind:
1. den triadischen Peirce-Zahlen
tdP = {1., 2., 3.},
2. den trichotomischen Peirce-Zahlen
ttP = {.1, .2, .3},
3. den diagonalen Peirce-Zahlen
dgP = {.1., .2., .3.},
die sich durch die der Semiotik eigene (nicht-kommutative) Operation der „additiven Assoziation“ (Bense 1981, S. 204) aus den übrigen beiden Zahlen bestimmen lassen:
dgP = tdP ⊛ ttP = {1., 2., 3.} ⊛ {.1, .2, .3} = {1.1 2.2 3.3}.

Als vierter semiotischer Zahlentyp werden nun die Mediativ-Zahlen eingeführt:
mdP = { ([.]a[.] ↔ [.]b[.])}.

Diese lassen sich unter Verwendung von Morphismen mit einer der Vektorschreibung angelehnten Notation auch als Paar von Morphismus und Heteromorphismus einführen:

a ↰↱ bmit a, b ∈ {(.)1(.), (.)2(.), (.)3(.)}.

Wie man erkennt, ist die obige Notation jedoch nur eine von vier möglichen Kombinationen aus Morphismen/Heteromorphismen:

a ↱↱ b ≡ (a.b.)

a ↰↱b ≡ (.ab.)

a ↱↰b ≡ (a..b)

a ↰↰b ≡ (.a.b)

Hierzu kann man nun 4 semiotische Matrizen aufgrund der 4 involvierten verschiedenen Peirce-Zahlen konstruieren:

1. a ↱↱ b ≡ (a.b.)

	1.	2.	3.
1.	1.1.	1.2.	1.3.
2.	2.1.	2.2.	2.3.
3.	3.1.	3.2.	3.3.

2. a ↰↱ b ≡ (.ab.)

	1.	2.	3.
.1	.11.	.12.	.13.
.2	.21.	.22.	.23.
.3	.31.	.32.	.33.

3. a ↱↰ b ≡ (a..b)

	.1	.2	.3
1.	1..1	1..2	1..3
2.	2..1	2..2	2..3
3.	3..1	3..2	3..3

4. a ↰↰ b ≡ (.a.b)

	.1	.2	.3
.1	.1.1	.1.2	.1.3
.2	.2.1	.2.2	.2.3
.3	.3.1	.3.2	.3.3

Ferner kann man über diesen Matrizen mit Hilfe der folgenden abstrakten Schemata je 10 Zeichenklassem und duale Realitätsthematiken konstruieren:

1. Zkl = (a.b. c.d. e.f.) × (f.e. d.c. b.a.)
2. Zkl = (.ab. .cd. .ef.) × (f..e d..c b..a)
3. Zkl = (a..b c..d e..f) × (f..e d..c b..a)
4. Zkl = (.a.b .c.d .e.f) × (f.e. d.c. b.a.)

Wie man sieht, gilt somit

Rth(Zkl 1) = Rth(Zkl 4)
Rth(Zkl 2) = Rth(Zkl 3),

das bedeutet aber, dass Eigenrealität bei Nr. 4 aufgehoben ist:
(.3.1 .2.2 .1.3) $\times$ (3.1. 2.2 .1.3.) mit
(.3.1 .2.2 .1.3) ≠ (3.1. 2.2 .1.3.), vgl.

$(3.1_{\alpha,\beta}\ 2.2_{\gamma,\delta}\ 1.3_{\varepsilon,\zeta}) \times (3.1_{\zeta,\varepsilon}\ 2.2_{\delta,\gamma}\ 1.3_{\beta,\alpha})$ mit
$(3.1_{\alpha,\beta}\ 2.2_{\gamma,\delta}\ 1.3_{\varepsilon,\zeta}) \neq (3.1_{\zeta,\varepsilon}\ 2.2_{\delta,\gamma}\ 1.3_{\beta,\alpha})$.

4. Kontexturale Mediationszahlen

Sowohl die kontexturierte Primzeichen-Relation

PZR* = $(.1.)_{1,3}$, $(.2.)_{1,2}$, $(.3.)_{2,3}$,

als auch die kontexturierte Hauptdiagonale der semiotischen Matrix

Gen. Kat. = $(1.1)_{1,3}$, $(2.2)_{1,2}$, $(3.3)_{2,3}$

werden nach dem Vorschlag Kaehrs (2008) mit den gleichen Kontexturenzahlen indiziert. Wir können somit die den identitiven Morphismen entsprechenden genuinen Subzeichen der Form (x.x), x $\in$ {1, 2, 3} als (primäre) Peirce-Zahlen auffassen und die nicht-genuinen Subzeichen der Form (x.y) bzw. $(x.y)^\circ$ = (y.x) als semiotische Vermittlungs- oder Mediationszahlen.

Auf diese Weise bekommen wir nun drei separate Vermittlungssysteme für kardinale, ordinale und relationale Peirce-Zahlen, die von Bense als

Za(R) = R(Za(kard), Za(ord), Za(rel))

im Sinne der „zeichenanalogen triadischen Relation der Zahl“ (Bense 1980, S. 293) definiert worden waren:

1. Kardinales, ordinales und relationales Teilsystem der tdP:

Peirce-Zahl (tdP) = 1 = $(1.1)_{1,3}$

Vermittlungszahlen = 1/2, 2/1 = $(1.2)_{1}$, $(2.1)_{1}$

Peirce-Zahl (tdP) = 2 = $(2.2)_{1,2}$

Vermittlungszahlen (tdP) = 3 = 1/3, 3/1 = $(1.3)_{3}$, $(3.1)_{3}$

Vermittlungszahlen = 2/3, 3/2 = $(2.3)_{2}$, $(3.2)_{2}$

Peirce-Zahl (tdP) = 3 = $(3.3)_{2,3}$

2. Kardinales, ordinales und relationales Teilsystem der ttP:

Peirce-Zahl (ttP) = .1 = $(1.1)_{1,3}$

Vermittlungszahlen = 1/2, 2/1 = $(1.2)_{1}$, $(2.1)_{1}$

Peirce-Zahl (ttP) = .2 = $(2.2)_{1,2}$

Vermittlungszahlen (ttP) = .3 = 1/3, 3/1 = $(1.3)_{3}$, $(3.1)_{3}$

Vermittlungszahlen = 2/3, 3/2 = $(2.3)_{2}$, $(3.2)_{2}$

Peirce-Zahl (ttP) = .3 = $(3.3)_{2,3}$

3. Kardinales, ordinales und relationales Teilsystem der dgP:

Peirce-Zahl (dgP) = .1. = $(1.1)_{1,3}$

Vermittlungszahlen = 1/2, 2/1 = $(1.2)_{1}$, $(2.1)_{1}$

Peirce-Zahl (dgP) = .2. = $(2.2)_{1,2}$

Vermittlungszahlen (dgP) = .3. =

1/3, 3/1 = $(1.3)_{3}$, $(3.1)_{3}$

Vermittlungszahlen = 2/3, 3/2 = $(2.3)_{2}$, $(3.2)_{2}$

Peirce-Zahl (dgP) = .3. = $(3.3)_{2,3}$

Geht man von der semiotischen 3×3 Matrix aus, so kann man die semiotischen Mediationszahlen wie folgt rot in eine „Kontexturenmatrix" eintragen:

1,3	1	3
1	1,2	2
3	2	2,3

Wie man also erkennt, spielt der Weg der Vermittlung bei den Peirce-Zahlen ℙ (tdP, ttP, dgP) keine Rolle. Wir haben damit

$\mathbb{P}(1) \to 1 \to \mathbb{P}(2)$:

$$\begin{tikzcd}
1,3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 3 \\
1 \arrow[r] & 1,2 & 2 \\
3 & 2 & 2,3
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}(1) \to 1 \to \mathbb{P}(3)$:

$$\begin{tikzcd}
1,3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] & 3 \arrow[d] \\
1 \arrow[d] & 1,2 & 2 \arrow[d] \\
3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 2,3
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{P}(2) \to 2 \to \mathbb{P}(3)$:

$$\begin{tikzcd}
1,3 & 1 & 3 \\
1 & 1,2 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\
3 & 2 \arrow[r] & 2,3
\end{tikzcd}$$

Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Köln 1981

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007. Digitalisat: http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond-Theory-Collection.pdf

Kaehr, Rudolf, Diamond semiotics. In: http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf (Kaehr 2008)

Kierkegaard, Søren, Der Begriff Angst. Frankfurt am Main 1984

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Die im Text angeführten Arbeiten von mir sind in Kürze zugänglich in

Toth, Alfred, Entwurf einer allgemeinen Zeichengrammatik. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Semiotische Limeszahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Äpfel und Birnen. 2 Bde. München 2010 (= Bd. 6, 7 der Ges. sem. Schriften)

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

Ein 2-dimensionales Modell der Zeichengenese

1.1. Meine Aufsätze zum Thema Semiotik und Ontologie sind in Bd. 3 und 4 meiner gesammelten Werke vereinigt (Toth 2010a, b). Vorausgeschickt sei, dass es zuerst bis heute kein allgemein akzeptiertes, nicht-widersprüchliches Modell der Zeichengenese gibt. Allgemein akzeptiert ist nur, dass das Zeichen „die Disjunktion zwischen Welt und Bewusstsein“ als Funktion überbrückt:

$Z = f(\omega, \beta)$.

Dies ist im Wesentliches die erste Theorie, die auf Bense (1967, S. 9) zurückgeht und auf dem semiotischen Axiom beruht „Was zum Zeichen erklärt wird, ist selbst kein Zeichen mehr, sondern Zuordnung (zu etwas, was Objekt sein kann); gewissermassen Metaobjekt“. In diesem unmittelbaren Modell wird also ein Objekt direkt auf ein Zeichen abgebildet. Semiotik ist also eine Struktur im Sinne der Modelltheorie, welche das folgende Paar erfüllt:

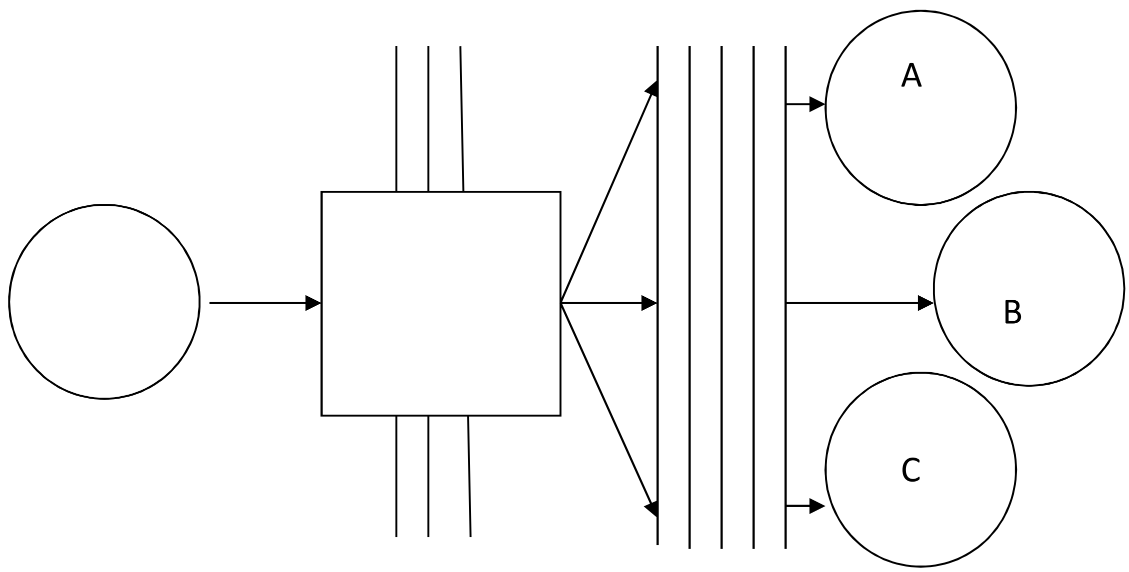
$\Sigma = <\omega, \beta>$.

1.2. Die zweite Theorie der Zeichengenese, die auf ein erweitertes, vermitteltes Modell zurückgeht, bildet das Objekt nicht direkt auf ein Zeichen ab, sondern nimmt eine Zwischenstufe der kategorialem Nullheit an: „Der Raum mit der 0-relationalen Strkutur wäre kein semiotischer Raum, sondern der ontische Raum aller verfügbaren Etwase, über denen der r > 0-relationale semiotische Raum thetisch definiert bzw. eingeführt (Bense 1975, S.65). Danach ist eine Semiotik also eine Struktur, welche das folgende Tripel erfüllt:

$\Sigma = <\omega, \delta, \beta>$,

wobei δ für die benseschen „verfügbaren“ bzw. „disponiblen“ Etwase steht (vgl. auch Bense 1975, S. 45 f.). Ein Objekt wird in diesem Modell also zuerst auf eine disponible Zeichenrelation abgebildet, bevor diese auf eine reale Zeichenrelation abgebildet wird.

2.Beide dieser Modelle haben gemeinsam, dass sie in ihrer Abfolge sich mit der landläufigen Vorstellung der Genese eines Zeichens decken: Der Knoten, den ich in ein Taschentuch mache, um mich an etwas zu erinnern, wird durch Modell 1.1., die Schrift, die ich benutze, um die Aussage von jemandem für andere zu konservieren, wird durch Modell 1.2. beschrieben, wobei die Schrift hier als System disponibler Relationen zwischen z.B. zwischen der Rede und dem potentiellen Leser der aufgezeichneten Rede fungiert. Modell 1.2. entspricht ferner einem weithin verbreiteten Perzeptionsmodell, wie z.B. demjenigen architektonischer Objekte, mit dem Joedicke (1985, S. 10) arbeitet:



Architekturraum | Filterung durch die Sinne | Filterung durch subjektive Variable | Erlebnisraum

Allgemein entspricht also dem Architekturraum der aposteriorische Teilraum des ontologischen Raumes, dem quadratisch gezeichneten mittleren Raum der präsemiotische Raum (vgl. Toth 2007), und dem Erlebnisraum der semiotische Raum. „Objektive“ Filter führen damit vom ontologischen in den präsemiotischen, und „subjektive“ Filter vom präsemiotischen in den semiotischen Raum, wobei das subjektive Filtersystem nach Joedicke vor allem phylogenetisch und kulturpezifisch determiniert ist, wonach man also wenigstens auf eine gewisse Weise die Zeichen als „kulturelle Bausteine“ (allerdings nicht im Sinne Ecos) verstehen kann.

3. Die im letzten Abschnitt enthaltene Behauptung, der aposteriorische Raum sei nur ein Teilraum des ontologischen Raumes, gründet sich in der heute weit akzeptiere Einsicht, wir würden nur einen Teil unserer Realität wahrnehmen. Dafür, dass wir überhaupt Objektivität wahrnehmen können, benötigen wir ja die objektiven Filter, und diese filtrieren ihrer Natur nach eben in perzipierbar-aposteriorische sowie nicht-perzipierbare apriorische Realität. So weist mindestens das Korrelat $\mathcal{J}$ aus OR = $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J})$ darauf hin, dass bereits ein Teil Objektivität in Subjektivität umgewandelt worden ist. Im folgenden bezeichnen wir den apriorischen Teilraum des ontologischen Raumes mit AR. Eine Semiotik ist demnach eine Struktur, welche alle Elemente im folgenden Quadrupel erfüllt

$\Sigma = <\{AR\}, \{OR\}, \{DR\}, \{ZR\}>$.

Darin – um es nochmals zu sagen - ist {AR} ist Menge aller apriorischen Objekte, {OR} die Menge aller aposteriorischen Objekte, {DR} die Menge der disponiblen Relationen, und {ZR} die Menge aller Zeichenrelationen. Wir können nun die Filter wie folgt als Transformationen definieren:

$\mathcal{F}_{obj} : \{OR\} \rightarrow \{DR\}$

$\mathcal{F}_{subj} : \{DR\} \rightarrow \{ZR\}$

Mit Transitivität folgt also

$\mathcal{F}_{subj}\,\mathcal{F}_{obj} = \{OR\} \rightarrow \{ZR\}$,

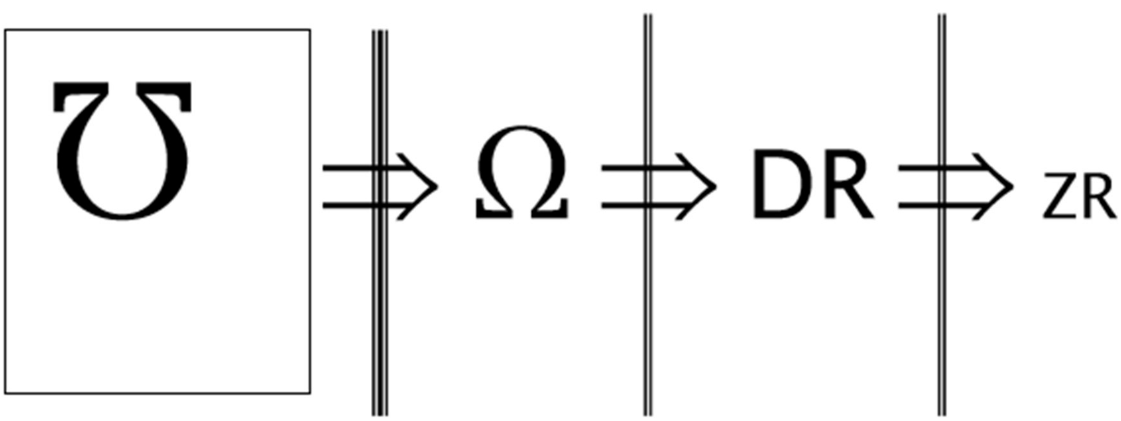
was eine topologische Definition des Modells 1.1. ist. Demnach ist Zeichengenese im Sinne von Metaobjektivation nichts anderes als als zweimalige Anwendung von Filtern auf die Objekte des aposteriorischen Teilraums des ontologischen Raumes. Der Vorteil dieser Definition besteht also darin, dass hiermit zum ersten Mal das Zeichen als nicht-intentionale Entität definiert werden kann.

Allerdings ist damit der Übergang

$\{AR\} \rightarrow \{OR\}$

nicht definiert. $\mathcal{F}_{\mathrm{obj}}$ besagt ja in Übereinstimmung mit dem Joedicke-Modell, dass das, was wir wahrnehmen, keine Objekte, sondern disponible Relationen sind. Genau auf der Ebene der disponiblen Relationen tauchen aber nach Bense (1975, S. 65 f.) die kategorialen Objekte O^0 auf. **Daraus folgt also, dass unsere Erkenntnis weder apriorisch noch aposteriorisch, sondern bereits präsemiotisch ist.** Der Übergang vom apriorischen zum aposteriorischen Raum ist lediglich nowendig, damit wir beim Akt der Wahrnehmung bereits den Unter-schied im Sinne Spencer Browns machen können, indem wir nämlich die von uns wahrgenommenen Objekte hinsichtlich sehr allgemeiner Prä-Kategorien wie Form, Funktion, Gestalt (Wiesenfahrth), Mittel, Gegenstand, Gebrauch (Bense 1981, S. 33) oder Sekanz, Semanz, Selektanz (Götz 1982, S. 4, 28) „imprägnieren“. Die durch das objektive Filtersystem den Gegenständen auferlegten, ihre Wahrnehmung ermöglichenden Raster sind also sozusagen eine moderne Version der alten Eidyllia-Theorie, wonach die Gegenstände selbst kleine Partikeln zu ihrer Wahrnehmung, Identifikation, Unterscheidung aussenden.

Wie der nicht-definierte Übergang {AR} → {OR} ausschaut, darüber können wir erst dann mehr sagen, wenn wir die Strukturen von {OR} genauer angeschaut haben. Bevor wir das tun, halten wir aber fest, dass aus unserem semiogenetischen Modell vor allem noch etwas viel Erstaunlicheres folgt: Es weist nämlich nicht nur 1 Kontexturengrenze auf wie die bisherigen semiogenetischen Modelle, sondern 3:



(wobei {℧} = {AR} und {Ω} = {OR}) .

Die Hauptkontexturengrenze befindet sich somit erwartungsgemäss zwischen {AR} und {OR}, zwei Nebenkontexturengrenze befinden sich zwischen {OR} und {DR} sowie {DR} und {ZR}. Es gibt somit 2 Kontexturengrenzen zwischen Zeichen und Objekt und nicht, wie bisher allgemein angenommen, 2, gesetzt wenigstens, dass die Semiose zwischen Objekt und Zeichen vollständig ist.

Nun definieren wir im Anschluss an Toth (2010)

AR = $<\Omega, \Omega^\circ>$,

d.h. das noch nicht durch den Kontexturübergang 1 gegangene apriorische Objekt besteht einmal aus dem nachher noch wahrnehmembaren (aposteriorischen) Teil Ω, ferner besteht es aus einem nachher nicht mehr wahrnehmbaren (apriorischen) Teil, den wir mit Ω^0 bezeichnen. Ferner sind wie üblich (Toth 2010)

OR = $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{I})$

DR = $(M^\circ, O^\circ, I^\circ)$

ZR = (M, O, I)

Bei AR gibt es somit zwei Möglichkeiten:

AR = $\{<\Omega_i, \Omega_i{}^\circ>\}$ oder

AR = $\{<\Omega_i, \Omega_j{}^\circ>\}$ (mit $i \neq j$), mit $i, j \in \{.1., .2., .3.\}$.

Somit gilt also

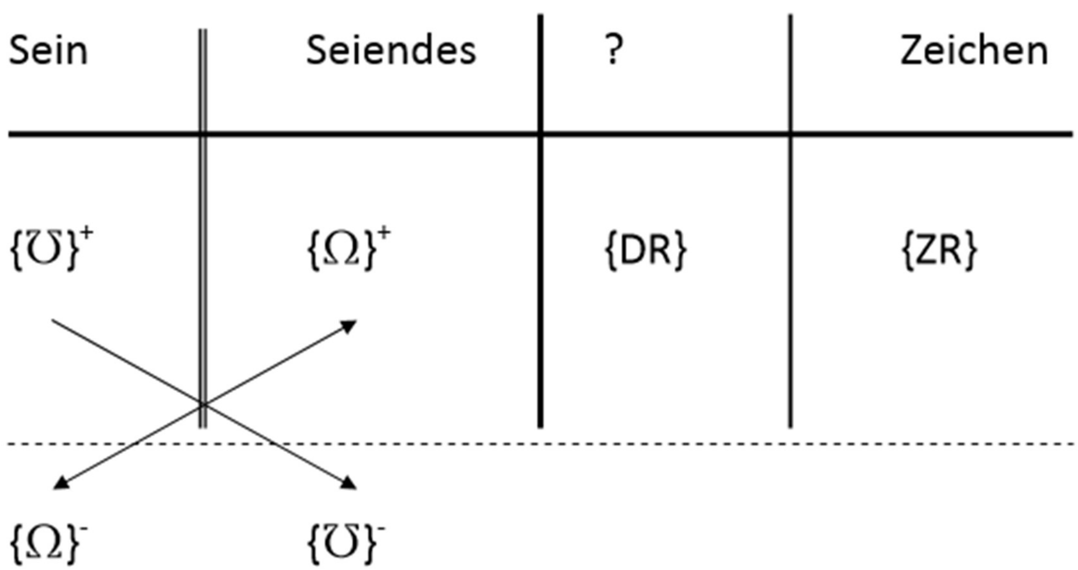
$\{AR\} = \{\{<\Omega_{(.)i(.)}, \Omega_{(.)j(.)}{}^\circ>\}\}$,

d.h. mit den Punkten werden alle 4 möglichen Kombinationen von Peirce-Zeichen, d.h. Kombinationen aus Haupt- und Stellenwerten der Dyaden offen gelassen:

x.y., .x.y, x..y, .xy.

Damit hätten wir die formalen Grundlagen zu einer vollständigen Ontologie des Seins. „Nun erhebt sich aber angesichts der ontologischen Differenz zwischen Sein und Seiendem das Problem der ‚meontologischen Differenz‘ zwischen Nichts und Nichtseiendem“ (Bense 1952, S. 80). Bei Heidegger liest man in diesem Zusammenhang: „Das Nichts ist das Nicht des Seienden und so das vom Seienden her erfahrene Sein. Die ontologische Differenz ist das Nicht zwischen Seiendem und Sein. Aber sowenig Sein als das Nicht zum Seienden ein Nichts ist im Sinne des nihil negativum, sowenig ist die Differenz als das Nicht zwischen Seiendem und Sein nur das Gebilde einer Distinktion des Verstandes (ens rationis). Jenes nichtende Nicht des Nichts und dieses nichtende Nicht der Differenz sind zwar nicht einerlei, aber das Selbe im Sinne dessen, was im Wesenden des Seins des Seienden zusammengehört“ (Heidegger 1965, S. 5).

Ich versuche im folgenden, die Angaben Heideggers auf der Basis des oben präsentierten Bildes semiotisch darzustellen:



Man beachte, dass die ontologische Differenz mit der ersten, „scharfen“ Kontexturengrenze zusammenfällt. Diese bewirkt im Sinne der Heideggerschen Bestimmungen, dass Sein und Nichts auf der einen sowie Seiendes und Nichten(des) auf der anderen Seite in einer chiastischen Relation stehen und also nicht einmal durch die horizontale gestrichelte Linie, welche die Negation repräsentiert, gespiegelt sind, denn nur so entkommt man dem Problem des Heideggerschen nihil negativum einerseits und des ens rationsis anderseits. Die dick ausgezogene Kontexturengrenze zwischen den den ontologischen Raum im

Sinne Benses (1975, S. 65 f.) repräsentierten Teilbereichen des Seins und des Seienden sowie denjenigen des präsemiotischen und des semiotischen Raumes ist also die im Rahmen der Polykontexturalitätstheorie immer wieder hervorgehobene Kontexturgrenze zwischen Zeichen und Objekt. Allerdings scheint der von Bense (1975, S. 45 f., 65 f.) verwendete Notbehelfsbegriff der „Disponibilität“ nicht geeignet, in einer Reihe mit den etablierten Begriffen Sein – Seiendes - ? – Zeichen zu stehen.

4. Wir können nun mit dem technischen Teil dieser Arbeit weiterfahren. Die oben aufgestellte Definition

$AR = \{<\Omega_{(.)i(.)}, \Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}>\}$

muss somit natürlich parametrisiert werden. Wenn wir im Blick auf den „scharfen“ Kontexturübergang i, j $\in$ {.1., .2., .3.} setzen, bekommen wir

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{.1}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{.1}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{.1}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{.2}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{.2}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{.2}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{1.}, \pm\Omega_{.3}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{2.}, \pm\Omega_{.3}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{3.}, \pm\Omega_{.3}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{1.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{2.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{3.}{}^{\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{.1^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{.1^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{.1^\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{.2^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{.2^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{.2^\circ}>\}$

$\{<\pm\Omega_{.1}, \pm\Omega_{.3^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.2}, \pm\Omega_{.3^\circ}>\}$ $\{<\pm\Omega_{.3}, \pm\Omega_{.3^\circ}>\}$

Wir können nun analog zu

$\{OR\} = \{(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J})\}$

setzen

$\{AR\} = \{<A^*, B^*, C^*>\}$,

wobei gelten soll

$A^* = \{<\{\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\mathcal{M}_{(.)j(.)^\circ}\}>$

$B^* = \{<\{\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\Omega_{(.)j(.)^\circ}\}>\}$

$C^* = \{<\{\mathcal{J}_{(.)i(.)}\}, \{\mathcal{J}_{(.)j(.)^\circ}\}>\}.$

Dann ist

$\{AR\} = \{<\pm\Omega_{i}, \pm\Omega_{j^\circ}>\} = <\pm A^*, \pm B^*, \pm C^*> =$

$\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)^\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)^\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{J}_{(.)i(.)}\}, \{\{\pm\mathcal{J}_{(.)i(.)^\circ}\}\}.$

$OR = \{\pm\mathcal{M}_{i}, \pm\Omega_{i}, \pm\mathcal{J}_{i}\}$

mit

$\pm\mathcal{M}_{i} \in \{\pm\mathcal{M}_{1}, \pm\mathcal{M}_{2}, \pm\mathcal{M}_{3}, \ldots, \pm\mathcal{M}_{n}\}$

$\pm\Omega_{i} \in \{\pm\Omega_{1}, \pm\Omega_{2}, \pm\Omega_{3}, \ldots, \pm\Omega_{n}\}$

$\pm\mathcal{J}_{i} \in \{\pm\mathcal{J}_{1}, \pm\mathcal{J}_{2}, \pm\mathcal{J}_{3}, \ldots, \pm\mathcal{J}_{n}\}.$

Bevor wir nun zum präsemiotischen und semiotischen Raum kommen, sei daran erinnert, dass die Zeichenrelation bereits für von mir parametrisiert eingeführt worden war (vgl. Toth 2001 u. 2008, S. 52 ff.), und zwar im Zusammenhang mit der Einführung komplexer Peircezahlen (Primzeichen) in Analogie zu komplexen Peanozahlen. Damit sind wir nun legitimiert, auch den intermediären präsemiotischen Raum als Raum von parametrisierten Klassen disponibler Kategorien einzuführen:

$DR = \{\pm M^{\circ}_{i}, \pm O^{\circ}_{i}, \pm I^{\circ}_{i}\}$

mit

$\pm M^{\circ}_{i} = \{\pm M^{\circ}_{1}, \pm M^{\circ}_{2}, \pm M^{\circ}_{3}, ..., \pm M^{\circ}_{n}\}$

$\pm O^{\circ}_{i} = \{\pm O^{\circ}_{1}, \pm O^{\circ}_{2}, vO^{\circ}_{3}, ..., \pm O^{\circ}_{n}\}$

$\pm I^{\circ}_{i} = \{\pm I^{\circ}_{1}, \pm I^{\circ}_{2}, \pm I^{\circ}_{3}, ..., \pm I^{\circ}_{n}\}$,

Für die Zeichenklassen ergibt sich wie bekannt

$ZR = \{\pm M, \pm O, \pm I\}$

mit

$\pm M_{i} = \{\pm M_{1}, \pm M_{2}, \pm M_{3}, ..., \pm M_{n}\}$

$\pm O_{i} = \{\pm O_{1}, \pm O_{2}, \pm O_{3}, ..., \pm O_{n}\}$

$\pm I_{i} = \{\pm I_{1}, \pm I_{2}, \pm I_{3}, ..., vI_{n}\}$.

Aus den 7 Quadrupeln, die in Toth (2010) dargestellt worden waren, erhalten wir nun die folgenden relationalen Mengen, wobei, zur Erinnerung, VZ für Vollständige Zeichenrelation, OK für Objektkategorie, KO für Kategorienobjekt, KZ für Kategorienzeichen, ZK für Zeichenkategorie, OZ für Objektzeichen und ZO für Zeichenobjekt steht:

1. VZ = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm\mathcal{M}_1, \ldots, \pm\mathcal{M}_n\}, \{\pm M^{\circ}{}_1, \ldots, \pm M^{\circ}{}_n\}, \{\pm M_1, \ldots, \pm M_n\}>, <\{\pm\Omega_1, \ldots, \pm\Omega_n\}, \{\pm O^{\circ}{}_1, \ldots, \pm O^{\circ}{}_n\}, \{\pm O_1, \ldots, \pm O_n\}>, <\{\pm\mathcal{I}_1, \ldots, \pm\mathcal{I}_n\}, \{\pm I^{\circ}{}_1, \ldots, \pm I^{\circ}{}_n\}, \{\pm I_1, \ldots, \pm I_n\}>\}$

2. OK = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm\mathcal{M}_1, \ldots, \pm\mathcal{M}_n\}, \{\pm M^{\circ}{}_1, \ldots, \pm M^{\circ}{}_n\}>, <\{\pm\Omega_1, \ldots, \pm\Omega_n\}, \{\pm O^{\circ}{}_1, \ldots, \pm O^{\circ}{}_n\}>, <\{\pm\mathcal{I}_1, \ldots, \pm\mathcal{I}_n\}, \{\pm I^{\circ}{}_1, \ldots, \pm I^{\circ}{}_n\}>\}$

3. KO = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm M^{\circ}{}_1, \ldots, \pm M^{\circ}{}_n\}, \{\pm\mathcal{M}_1, \ldots, \pm\mathcal{M}_n\}>, <\{\pm O^{\circ}{}_1, \ldots, \pm O^{\circ}{}_n\}, \{\pm\Omega_1, \ldots, \pm\Omega_n\}>, <\{\pm I^{\circ}{}_1, \ldots, \pm I^{\circ}{}_n\}, \{\pm\mathcal{I}_1, \ldots, \pm\mathcal{I}_n\}>\}$

4. KZ = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm M^{\circ}{}_1, \ldots, \pm M^{\circ}{}_n\}, \{\pm M_1, \ldots, \pm M_n\}>, <\{\pm O^{\circ}{}_1, \ldots, \pm O^{\circ}{}_n\}, \{\pm O_1, \ldots, \pm O_n\}>, <\{\pm I^{\circ}{}_1, \ldots, \pm I^{\circ}{}_n\}, \{\pm I_1, \ldots, \pm I_n\}>\}$

5. ZK = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm M_1, \ldots, \pm M_n\}, \{\pm M^{\circ}{}_1, \ldots, \pm M^{\circ}{}_n\}>, <\{\pm O_1, \ldots, \pm O_n\}, \{\pm O^{\circ}{}_1, \ldots, \pm O^{\circ}{}_n\}>, <\{\pm I_1, \ldots, \pm I_n\}, \{\pm I^{\circ}{}_1, \ldots, \pm I^{\circ}{}_n\}>\}$

6. OZ = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n\}, \{\pm M_1, \ldots, \pm M_n\}>, <\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}, \{\pm O_1, \ldots, \pm O_n\}>, <\{\pm\mathcal{I}_1, \ldots, \pm\mathcal{I}_n\}, \{\pm I_1, \ldots, \pm I_n\}>\}$

7. ZO = $\{\{<\{\pm\mathcal{M}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{M}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\},\{\{<\{\pm\Omega_{(.)i(.)}\}, \{\pm\Omega_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}\}, \{\{<\{\pm\mathcal{I}_{(.)i(.)}\}, \{\pm\mathcal{I}_{(.)j(.)}{}^{\circ}\}>\}, <\{\pm M_1, \ldots, \pm M_n\}, \{\pm\mathcal{M}_1, \ldots, \pm\mathcal{M}_n\}>, <\{\pm O_1, \ldots, \pm O_n\}, \pm\Omega_1, \ldots, \pm\Omega_n\}>, <\{I\pm_1, \ldots, \pm I_n\}>\}, \{\pm\mathcal{I}_1, \ldots, \pm\mathcal{I}_n\} >\}$

5. Es ist uns hier also gelungen, ein vollständiges mathematisch-semiotisches Modell der Zeichengenese, sogar einschliesslich der Form der apriorischen Relationen, die uns normalerweise in einer „Black Box“ verborgen sind, zu rekonstruieren. Damit kann nicht nur das Modell 1.1 welches das Paar

$\Sigma = <\Omega, ZR>$

und das Modell 1.2., welches das Tripel

$\Sigma = <\Omega, DR, ZR>$

erfüllen, mathematisch präzise dargestellt werden, sondern auch das weitere Modell, nennen wir es einfach 1.3, welches das Quadrupel

$\Sigma = <\mho, \Omega, DR, ZR>$

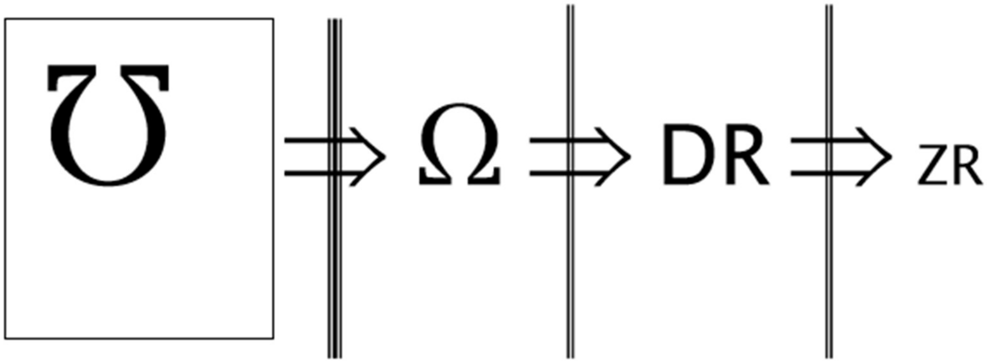
erfüllt. Auch wenn es trivial klingt – die Begründung folgt sogleich, müssen wir hier aussprechen: Diese 4 Semiotiken sind transzendental, denn sie gründen im Satz vom Grunde.

Revolutionär war es demnach, wenn mit Bruch von mehereren tausend Jahren Geistesgeschichte (die Mathematik natürlich eingeschlossen) Günther alle diese Modelle verwarf und an den Anfang des Objektes, das eingeschlossen war im ontologischen Raum, ein jeglicher Materialität und Formkonstanz entblösstes Nichts setzte, von dem man nicht einmal sagen kann, es nähme den Platz der Objekte ein, denn solche gibt es auf dieser tiefsten Güntherschen Ebene gar nicht, die ja unter den bipolaren binären Dichotomien liegt. Damit ist es ferner auch sinnlos zu sagen, Günther habe die Semiogenese ihrer Transzendentalität befreit, da auch der Unterschied von Diesseits und Jenseits jenseits der Günther-Logik liegt. Bei Günther, und, in seiner Nachfolge bei Kronthaler (1986, S. 26) steht also am Anfang der Semiogenese nicht das Objekt, sondern ein Morphogramm genanntes Leerpattern, das aus Kenogrammen besteht und in das Werte aus den drei „graphematischen“ (Kaehr) Basiswissenschaft der Mathematik, Logik und Semiotik eingeschrieben werden können. Im Falle der Wertbelegung führt diese Inskription in der Mathematik zunächst zu den Peanozahlen $\mathbb{N} \cup 0$, in der Logik zu den

Wertzahlen 0 und 1 und in der Semiotik zu den Peirce-Zahlen 0, 1, 2, 3 (wobei die 0 für die Ebene der Präsemiotik reserviert ist). Dabei sind die Wertbelegungen durch die drei Ebene des Proto-, Deutero- und Trito-Systems gegliedert, wobei das Proto-System dem Peano-System am nächsten steht.

> Ein Problem besteht hier darin, dass die Abbildung Keno → Wertzahlen (mit den drei Schadach-Transformationen) zunächt zu den Trito-, dann zu den Deutero- und schliesslich zu den Proto-Zahlen führen muss, da bei Trito→Deutero die Positionsabstraktion und bei Deutero→Proto die Itrationsabstraktion eintritt. Der Übergang von Proto→Peano (mit „Qualitätssprung") wird Monokontexturalisierung genannt. Keno setzt also einerseits bereits Wertzahlen aus der Mathematik, Logik, Semiotik voraus, nämlich zur Belegung, anderseits aber treten diese ja erst am Schluss der Abstraktoionskette, beim Übergang Proto→Peano, auf!

Stimmt es somit, dass beim kenogramatischen Modell der Zeichengenese im Gegensatz zum metaobjektiven Modell die Kenostruktur den Platz des Objektes einnimmt? – Die Antwort ist nach dem bisher Gesagten: ja und nein. Ja, denn die Kenogrammatik liegt tiefer als die Dichotomien, daraus folgt, dass es dort auch keine Objekte geben kann und wir somit im „meontischen" Kontexturbereich des Nichts sind. Nein, denn die Kenogrammatik setzt Wertzahlen voraus, die bereits die abgeschlossene Zeichengenese voraussetzen, denn die Werte stammen aus der Mathematik, der Logik und der Semiotik! Wir haben hier offenbar das „kenogrammatische Paradox der drei Fundamental-Wissenschaften" vor uns. Ich schlage hier aber eine Lösung vor, um die beiden Modelle der Zeichenbildung,



und das sog. Semiosis-Kenosis-Modell (zum Begriff und zu Erläuterungen der Kenosis vgl. Mahler 1993, ferner Kronthaler 1986, S. 16)

Wert-Struktur ⇒ Trito-Struktur ⇒ Deutero-Struktur ⇒ Proto-Struktur

miteinander zu vereinigen:

	℧	⇒ Ω	⇒ DR	⇒ ZR
Peano				
Protero				
Deutero				
Trito				

Diesem kombinierten Modell liegt also die Struktur

→ Metaobjektivation (inverser Prozess ??)

Kenosis (↓)

Semiosis (↑)

zugrunde. Der horizontale schwarze Strich trennt Qualitätszahlen von Quantitätszahlen. Der vertikale schwarze Strich trennt Apriorität von Aposteriorität.

Bibliographie

Bense, Max, Die Theorie Kafkas. Köln 1952

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. 3 Bde. Hamburg 1976-80

Heidegger, Martin, Von Wesen des Grundes. 5. Aufl. Frankfurt am Main 1965

Joedicke, Jürgen, Raum und Form in der Architektur. Stuttgart 1985

Kaehr, Rudolf, Skizze eines Gewebes rechnender Räume in denkender Leere. Glasgow, umfangreiche Edition 2004

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Mahler, Thomas, Morphogrammatik. Klagenfurt 1993

Toth, Alfred, Monokontexturale und polykontexturale Semiotik. In: Bernard, Jeff/Withalm, Gloria (Hrsg.), Myths, Rites, Simulacra. Proceedings of the 10th International Symposium of the Austrian Association for Semiotics, University of Applied Arts Vienna, December 2000. Vol. I: Theory and Foundations & 7th Austro-Hungarian Semio-Philosophical Colloquium. Vienna 2001, S. 117-134

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007

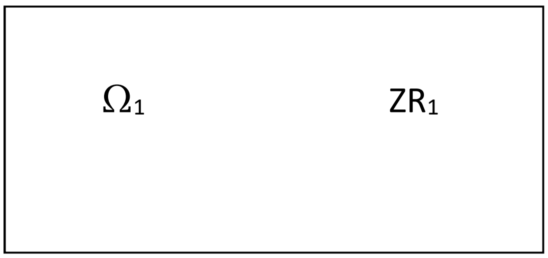
Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Die Illokalität des Bewusstseins. München 2010a

Toth, Alfred, Zeichen und Objekt. 2 Bde. München 2010b

Die Entstehung der Peirce-Zahlen

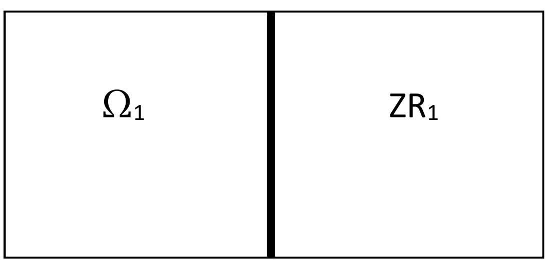
1. Würden sich ein Zeichen und das von ihm bezeichnete Objekt in derselben Kontextur befinden, wären sie ununterscheidbar, und, kraft der Prävalenz der Vorgegebenheit des Objektes vor der Nicht-Vorgegebenheit des Zeichens, wäre das Zeichens überflüssig bzw. sinnlos. Trotzdem kann man diesen Fall modellieren. Der topologischen Darstellung



entspricht die partiell transzendente Zeichenklasse ZR*, die das bezeichnete Objekte als kategoriale Nullrelation im Sinne von Bense (1975, S. 65 f.) enthält:

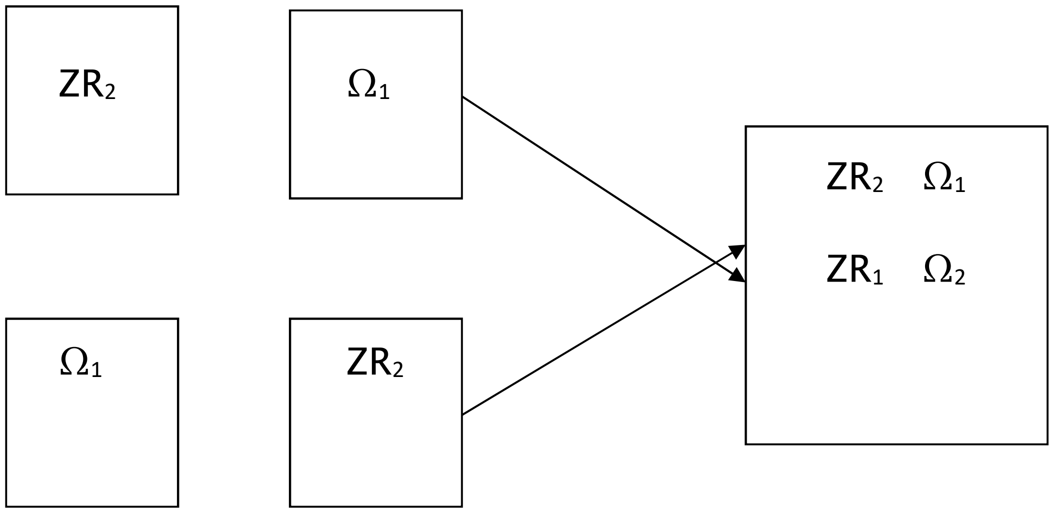
ZR* = (3.a 2.b 1.c 0.d).

2. Der übliche Fall innerhalb der monokontexturalen Peirce-Bense-Semiotik ist



mit ZR = (3.a 2.b 1.c) | (0.d).

3. Eine weitere Form der Modellierung von Transzendenz für die Semiotik besteht in der Einführung von Kontexturenzahlen (Kaehr 2008). Danach kann man einen topologischen Raum einführen, der ein Objekt und ein Zeichen enthält, die verschiedenen Kontexturen angehören:



Diese Formalisierung hat enorme Konsequenzen für die semiotische Objekttheorie (vgl. Toth 2010). Die vollständige Definition des Zeichens

VZR = {{M}, {O}, {I}}

geht ja davon aus, dass {O} die Klasse aller Objekte ist, die mit einem Mittel aus dem Repertoire {M} von irgendwem {I} bezeichnet werden können. {O} setzt aber natürlich voraus, dass sämtliche Objekte dieser Welt einer einzigen Ontologie angehören. Im Gegensatz dazu impliziert die Kontexturalitätstheorie jedoch, dass es eine Vielzahl solcher Ontologien gibt, d.h. VZR muss wie folgt angepasst werden:

VZR* = {{M}, {{O}}, {I}}.

{{O}} ist nun also der topologische Raum der Umgebungen der O´s, d.h. die Menge aller Ontologien oder semiotischen „möglichen Welten“. Wenn wir, wie in der semiotischen Objekttheorie üblich, für die ontologischen Objekte Ω schreiben und O für die semiotischen Objektbezüge beibehalten, dann haben wir also anstatt

$O \in \{\Omega_1 \ldots \Omega_n\}$

in der kontexturalisierten (ontologisch mehrsortigen) Semiotik

$O \subset \{\{\Omega_{11} \ldots \Omega_{1n}\}, \{\Omega_{21} \ldots \Omega_{2n}\}, \ldots, \{\Omega_{m1} \ldots \Omega_{mn}\}\}.$

4. Wenn man sich daran erinnert, dass in der semiotischen Objekttheorie eine Semiotik als eine Struktur definiert wird, welche das Tripel

Σ = <OR, DR, ZR>

erfüllt, dann erhält also jedes $\Omega \in \{\Omega_i\}$ die erste Kontexturenzahl, d.h Ω_1. Wegen des Benseschen Gesetzes der Mitführung (vgl. Bense 1979, S. 43, 45), und deshalb bekommt jedes im geordneten Tripel Σ an zweiter Stelle stehenden DR_i nicht die Kontexturenzahl 2, sondern das Paar von Kontexturenzahlen 1,2. Jedes ZR_i bekommt daher 1, 2, 3. Wir haben also

Σ_{kont} = <OR_1, $DR_{1,2}$, $ZR_{1,2,3}$>.

Es ist somit möglich, die Entstehung der Peirce-Zahlen bzw. (wie Bense sie unglücklich nannte) der Prim-Zeichen 1, 2, 3 aus den Kontexturenzahlen zu erklären. Peirce-Zahlen sind also ursprünglich gezählte Kontexturen. Die für die Definition der Zeichenrelation nach Bense (1979, S. 53, 67) so charakteristische verschachtelte Inklusion (M → (M → O), (M → O → O)) (die im übrigen, wie von mir an anderer Stelle gezeigt, für höhere Relationen zu einem unendlichen Regress nach der Art der „la vache qui rit"-Mengen führt) verdankt sich also dem Prinzip der Mitführung der Kontexturenzahlen vom ontologischen über den prä-semiotischen zum semiotischen Raum.

Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics. http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf (2008)

Toth, Alfred, Zeichen und Objekt. 3 Bde. (= Bde. 6, 7, 8 der Ges. Werke). München 2010

Zeicheninklusionen

1. Nach Bense ist das Zeichen eine geschachtelte triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation:

$ZR = (1 \to (1 \to 2) \to (1 \to 2 \to 3))$.

Da die semiosische Generation bekanntlich mit der mengentheoretischen Inklusion korrespondiert, kann man also auch schreiben

$ZR = (1 \subset (1 \subset 2) \subset (1 \subset 2 \subset 3))$

(ZR besteht also aus genau 5 Inklusionen, die nicht-linear geordnet sind. Allein deswegen verbietet sich die Übertragung der Peano-Axiome auf die Benseschen „Zeichenzahlen".)

2. Für die kleine Matrix gilt somit, was die triadischen und trichotomischen Peirce-Zahlen anbetrifft:

$$
\begin{array}{ccccc}
1.1 & \subset & 1.2 & \subset & 1.3 \\
\cap & & \cap & & \cap \\
2.1 & \subset & 2.2 & \subset & 2.3 \\
\cap & & \cap & & \cap \\
3.1 & \subset & 3.2 & \subset & 3.3
\end{array}
$$

Ferner gilt für die hauptdiagonalen Peirce-Zahlen:

$(1.1) \subset (2.2) \subset (3.3)$.

Es gilt aber nicht für die nebendiagonalen Peirce-Zahlen (die wegen dieses Strukturmerkmals von den vorigen getrennt werden müssen!)

$(1.3) \not\subset (2.2) \not\subset (3.1)$.

Die für sämtliche semiotischen Relationen, in Sonderheit auch für die Ordnung auf Zeichenklassen

(3.a 2.b 1.c) mit a $\subseteq$ b $\subseteq$ c

Inklusionsrelation gilt also ausgerechnet nicht für die eigenreale Zeichenklasse des Zeichens selbst (Bense 1992)!

3. Die Tatsache, dass bei Zeichenrelationen die Möglichkeit der Gleichheit von trichotomischen Peirce-Zahlen zugelassen ist, bzw., anders ausgedrückt ist, die Relation $\subset$ durch die Relation $\subseteq$ ersetzt ist, führt dazu, dass es keinerlei Möglichkeit gibt, alle Zeichenklassen linear zu ordnen. Wo das = auftaucht, tritt Trichotomienwechsel auf:

3.1 2.1 1.1

∩ ∩ ∩

3.1 2.1 1.2

∩ ∩ ∩

3.1 2.1 1.3

-------------- (∩∩ ∪)

3.1 2.2 1.2

∩ ∩ ∩

3.1 2.2 1.3

∩ ∩ ∩

3.1 2.3 1.3

-------------- (∩∪ ∪)

3.2 2.2 1.2

$\cap \quad \cap \quad \cap$

3.2 2.2 1.3

$\cap \quad \cap \quad \cap$

3.2 2.3 1.3

$\cap \quad \cap \quad \cap$

3.3 2.3 1.3

(Trichotomienwechsel ist somit durch Inklusionstypen allein eindeutig charakterisierbar.)

4. Berücksichtigt man schliesslich sowohl die triadische (tdP) als auch die trichotomischen Peirce-Zahlen (ttP), so treten die beiden rein inklusiven Strukturen einzig bei

$(3.1\ 2.2\ 1.3) = (3. \supset 2. \supset 1.) \oplus (.1 \subset .2 \subset .3)$

sowie bei

$(3.3\ 2.2\ 1.1) = (3. \supset 2. \supset 1.) \oplus (3. \supset 2. \supset 1.)$

(wobei das Zeichen $\oplus$ die additive Assoziation bezeichnet, vgl. Bense 1981, S. 204) auf, d.h. bei der eigenrealen und der kategorienrealen Zeichenrelation auf, denen somit ein weiteres gemeinsames Merkmal zukommt (vgl. Bense 1992).

Bibliographie

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kategorien und Peirce-Zahlen

1. In Toth (2009) wurden triadische (tdP) und trichotomische Peirce-Zahlen (ttP) unterscheiden:

tdP = {(a+n.b)}

ttP = {(a.b+n)}, n $\in$ {1, 2, 3}

Wenn man sich nun die Definition der algebraischen Kategorien anschaut, welche Bense (1981, S. 124 ff.) in die Semiotik eingeführt hat:

X := (a → b)

mit X $\in$ {α, β, α^{o}, β^{o}, $\beta\alpha$, $\alpha^{o}\beta^{o}$, id1, id2, id3}

und a, b $\in$ {1, 2, 3},

dann erkennt man sehr schnell, dass sie insofern mehrdeutig ist, als dass nicht zwischen tdP und ttP unterschieden wird; z.B. kann

α = 1 → 2

sowohl die Transformation tdP → tdP

(1.1) → (1.2),

als auch die Transformation ttP → ttP

(1.1) → (2.1),

beschreiben. (Sie kann hingegen nicht die Transformation (1.1) → (2.2) beschreiben, da es sich hier weder um tdP noch um ttP, sondern auch diagP, also diagonale Peirce-Zahlen handelt.)

2. Die Ambiguität sieht also formal wie folgt aus

2.1. (a.1) → (a.2)

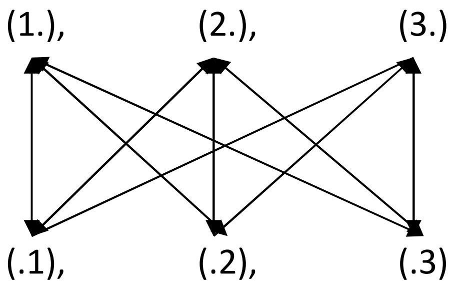
2.2. (1.a) → (1.b),

oder abstrakt

(.a) → (.b)

(a.) → (b.).

D.h. wir gehen bei einer triadischen Zeichenrelation von folgenden 6 Möglickten morphismischer Abbildungen aus:



Dabei ergeben sich also

1. →: $\{id1, \alpha, \beta\alpha\}$ → .1: $\{id1, \alpha^{o}, \alpha^{o}\beta^{o}\}$

2. →: $\{\alpha^{o}, id2, \beta\}$ → .2: $\{\alpha, id2, \beta^{o}\}$

3. →: $\{\alpha^{o}\beta^{o}, \beta^{o}, id3\}$ → .3: $\{\beta\alpha, \beta, id3\}$,

wobei die allgemeine Struktur wie folgt aussieht:

1. →: $\{A, \; B, \; C\}$ → .1: $\{A^{o}, B^{o}, \; C^{o}\}$

Da sich tdP und ttP nur durch die Position in einer Dyade unterscheiden, muss also eine Kategorie unter jeweils zweimal drei Möglichkeiten morphismischer Abbildung innerhalb eines Subzeichens entscheiden können; z.B. bei (1.3)

$$\left(1. \to: \{id1, \alpha, \boxed{\beta\alpha}\}\right) \longrightarrow \left(\to .3: \{\boxed{\beta\alpha}, \beta, id3\},\right)$$

Es gilt somit:

$$M(a.b) = M(a.\rightarrow) \rightarrow M(\rightarrow.b) := \cap(\underline{C}(M(a.\rightarrow), \underline{D}(M(\rightarrow.b)).$$

Bibliographie

Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

Bedingungen von Umgebungen für Subzeichen

Wie in Toth (2010) gezeigt, hat jedes der 9 Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix zu seiner Umgebung sich selbst und seine unmittelbar adjazenten Subzeichen, wobei unter den letzteren nur triadische und trichotomische Peirce-Zahlen, nicht aber Diagonalzahlen verstanden werden. Als Beispiel stehen die Umgebungen von (1.1):

U(1.1) = {(1.1), (1.2), (2.1)}

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\mathbf{1.1}} & \rightarrow & \underline{1.2} & & 1.3 \\ \downarrow & & & & \\ \underline{2.1} & & 2.2 & & 2.3 \\ & & & & \\ 3.1 & & 3.2 & & 3.3 \end{array}$$

Wenn wir nun z.B. U(3.3) bestimmen, dann sehen wir, dass U(1.1) $\cap$ U(3.3) = $\varnothing$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc} 1.1 & \rightarrow & 1.2 & & 1.3 \\ \downarrow & & & & \\ 2.1 & & 2.2 & & \underline{2.3} \\ & & & & \\ 3.1 & & \underline{3.2} & \leftarrow & \underline{\mathbf{3.3}} \end{array}$$

Im Falle von mittelbar adjazenter Nachbarschaft hätten wir indessen:

U(1.1) $\cap$ (3.3) = (3.2).

Nun kann, wie man aus der Matrix sieht, ein Subzeichen sowohl linke, rechte als auch beiderseitige einerseits sowie obere, unteren und wiederum beiderseitige Umgebungen haben. Somit ist es möglich, die Bedingungen für die Umgebungen von Subzeichen allgemein mit Hilfe von triadischen und trichotomischen Peirce-zahlen zu formulieren:

1. $y \in U(x) \rightarrow x \in U(y)$

2. $U(x) \cap U(y) \neq \varnothing \leftrightarrow U(x) \vee U(y) \in$ HD/ND,

wobei die 2. Bedingung dasselbe bedeutet, wie dass sowohl x als auch y entweder identitive Morphismen oder die Subzeichen (1.3) bzw. (3.1) sind.

Der Schnitt zweier Umgebungen von Subzeichen x und y ist also in Sonderheit dann nicht leer, wenn

(x-1), x , (x+1)

(-1x), x, (1+x)

auf das ganze semiotische orthogonale System beziehen. Ausführlicher: Sei Sz = (a.b), dann gilt folgendes Maximalsystem:

U(a.b) = {(a-1.b), (a.b), (a+1.b), (a.b-1), (a.b+1), (a-1.b-1), (a+1.b+1)}.

Bibliographie

Toth, Alfred, Zeichenklassen und ihre Umgebungen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Unstetigkeiten des qualitativen semiotischen Raums

1. „Der erlebte Raum weist ausgesprochene Unstetigkeiten auf“ (Bollnow 1963, S. 17). „Weil der Raum von Anfang an nicht homogen ist, hat jeder Ort seinen besonderen Charakter, seine `Tönung`, seinen ´besonderen Akzent´ (Cassirer)“ (1963, S. 65). „Der bewohnte Raum transzendiert den geometrischen Raum“ (1963, S. 135). „Eliade geht in seinem Buch über ´das Heilige´ von der Feststellung aus, dass es für den religiösen Menschen keinen homogenen Raum gibt: ´Er weist Brüche und Risse auf; er enthält Teile, die von den übrigen qualitativ verschieden sind´“ (1963, S. 141). Fassbinder ist sogar soweit gegangen, seinen letzten Film „Querelle“ (1982) ganz im Studio zu drehen, weil er davon überzeugt war, dass der reale Raum überall schon sich selbst transzendiert, nach etwas „Heiligem“ strebt.

2. Nach Toth (2009) gibt es 3 semiotische Zahlen oder Peirce-Zahlen:

1. die triadischen Peirce-Zahlen (tdP) der Form (1.a), (2.a), (3.a)

2. die trichotomischen Peirce-Zahlen (ttP) der Form (a.1), (a.2), (a.3)

3. die diagonalen Peirce-Zahlen (dgP) der Form (a.a)

mit a $\in$ {1, 2, 3}.

3. Will man also einen Versuch machen, die Bollnowschen qualitativ-topologischen Unstetigkeiten mit der Hilfe der Semiotik formal darzustellen, gibt es die folgenden Formen von Unstetigkeiten:

1. tdP → ttP 1.° ttP → tdP

2. ttP → dgP 2.° dgP → ttP

3. tdP →dgP 3.° dgP → tdP

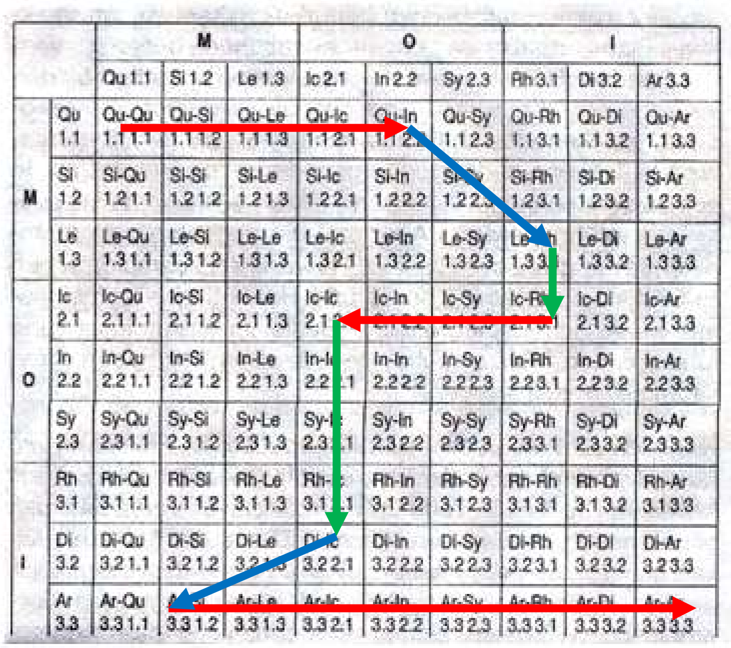
mit den Richtungen

1. ↲↳↰↱ 1.° ↰↱↲↳

2. →← 2.° ← →

3. ↘↙↗↖ 3. °↗↖↘↙

Ein Beispiel für starke Inhomogenität eines Teilraums des Raum der grossen semiotischen Matrix ist:



		M			O			I		
		Qu 1.1	Si 1.2	Le 1.3	Ic 2.1	In 2.2	Sy 2.3	Rh 3.1	Di 3.2	Ar 3.3
M	Qu 1.1	Qu-Qu 1.11.1	Qu-Si 1.11.2	Qu-Le 1.11.3	Qu-Ic 1.12.1	Qu-In 1.12.2	Qu-Sy 1.12.3	Qu-Rh 1.13.1	Qu-Di 1.13.2	Qu-Ar 1.13.3
	Si 1.2	Si-Qu 1.21.1	Si-Si 1.21.2	Si-Le 1.21.3	Si-Ic 1.22.1	Si-In 1.22.2	Si-Sy 1.22.[illegible]	Si-Rh 1.23.1	Si-Di 1.23.2	Si-Ar 1.23.3
	Le 1.3	Le-Qu 1.31.1	Le-Si 1.31.2	Le-Le 1.31.3	Le-Ic 1.32.1	Le-In 1.32.2	Le-Sy 1.32.3	Le-[illegible] 1.33.[illegible]	Le-Di 1.33.2	Le-Ar 1.33.3
O	Ic 2.1	Ic-Qu 2.11.1	Ic-Si 2.11.2	Ic-Le 2.11.3	Ic-Ic 2.1[illegible]	Ic-In [illegible]	Ic-Sy [illegible]	Ic-R[illegible]	Ic-Di 2.13.2	Ic-Ar 2.13.3
	In 2.2	In-Qu 2.21.1	In-Si 2.21.2	In-Le 2.21.3	In-I[illegible] 2.2[illegible].1	In-In 2.22.2	In-Sy 2.22.3	In-Rh 2.23.1	In-Di 2.23.2	In-Ar 2.23.3
	Sy 2.3	Sy-Qu 2.31.1	Sy-Si 2.31.2	Sy-Le 2.31.3	Sy-[illegible] 2.3[illegible].1	Sy-In 2.32.2	Sy-Sy 2.32.3	Sy-Rh 2.33.1	Sy-Di 2.33.2	Sy-Ar 2.33.3
I	Rh 3.1	Rh-Qu 3.11.1	Rh-Si 3.11.2	Rh-Le 3.11.3	Rh-[illegible] 3.1[illegible].1	Rh-In 3.12.2	Rh-Sy 3.12.3	Rh-Rh 3.13.1	Rh-Di 3.13.2	Rh-Ar 3.13.3
	Di 3.2	Di-Qu 3.21.1	Di-Si 3.21.2	Di-Le 3.2[illegible]	Di-[illegible] 3.22.1	Di-In 3.22.2	Di-Sy 3.22.3	Di-Rh 3.23.1	Di-Di 3.23.2	Di-Ar 3.23.3
	Ar 3.3	Ar-Qu 3.31.1	[illegible] 3.31.2	Ar-Le 3.31.3	Ar-Ic 3.32.1	Ar-In 3.32.2	Ar-Sy 3.32.3	Ar-Rh 3.33.1	Ar-Di 3.33.2	Ar-[illegible] 3.33.3

Bibliographie

Bollnow, Otto Friedrich, Mensch und Raum. Stuttgart 1963

Fischer, Robert (Hrsg.), Fassbinder über Fassbinder. Frankfurt am Main 2004

Semiotische Umgebungen und Kontexturgrenzen

1. Wie in Toth (2010a) definiert, verstehen wir unter der semiotischen Umgebung eines Punktes die topologische Umgebung eines Subzeichens (a.b), wobei diese Menge das Subzeichen selbst sowie alle durch maximal 1 triadischen oder 1 trichotomischen Repräsentationswert entfernten Subzeichen enthält:

U(a.b) = {(a.b), (a+1.b), (a.b+1)},

d.h. Diagonalverbindungen sind ausgeschlossen. Wie ebenfalls gezeigt wurde, hat jedes Subzeichen hiermit maximal 3 und minimal 2 semiotische Umgebungen, welche sog. Repräsentations-Felder bilden (Toth 2010b).

2. Semiotische Umgebungen sind damit auf einem topologischen Nachbarschaftsbegriff definiert, der sich die Unterscheidung triadischer, trichotomischer und diagonaler Peirce-Zahlen zunutze macht (Toth 2009). Danach können trichotomische Peirce-Zahlen als Ausdifferenzierungen ein und derselben semiotischen Kontextur definiert werden, während triadische Peirce-Zahl die Kontexturen selbst zählen. Die diagonalen Peirce-Zahlen tun somit beides. Damit kann man nun in die Schemata der semiotischen Umgebungen der 9 Peirceschen Subzeichen zugleich die Kontexturengrenzen einzeichnen, wobei sich einige überraschende Strukturen ergeben.

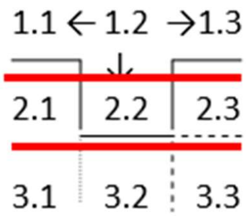
2.1. RepF(1.1)

1.1 → 1.2 | 1.3
↓
2.1 | 2.2 | 2.3
3.1 3.2 3.3

RepF1 (1.1) = {((1.1), (1.2), (2.1)}
RepF2 (1.1) = {(3.1), (2.2), (1.3)}
RepF3 (1.1) = {(2.3), (3.2), (3.3)}

Kein RepF ist unzusammenhängend.

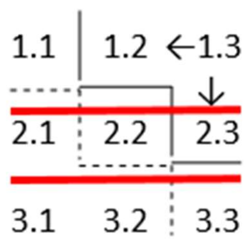
2.2. RepF(1.2)



RepF1 (1.2) = {(1.1), (1.2), (1.3), (2.2)}
RepF2 (1.2) = {(2.1), (2.3), (3.2)}
RepF3 (1.2) = {(3.1), (3.3)}

RepF3 ist nicht zusammenhängend.

2.3. RepF(1.3)



RepF1 (1.3) = {(1.2), (1.3), (2.3)}
RepF2 (1.3) = {(1.1), (2.2), (3.3)}
RepF3 (1.3) = {(2.1), (3.1), (3.2)}

Alle drei RepF sind zusammenhängend. Wie man im übrigen sieht, gilt für n Repräsentationsfelder stets:

RepF(1) $\cap$ RepF(2) $\cap$ ... $\cap$ RepF(3) = $\varnothing$.

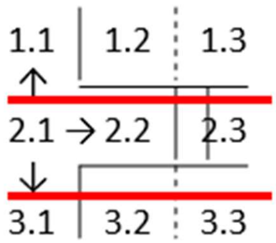
Da stets

(1.1) $\in$ RepF(1.1)

ist, gilt darüber hinaus

RepF(1) ∪ RepF(2) ∪ ... ∪ RepF(3) = vollständige Matrix.

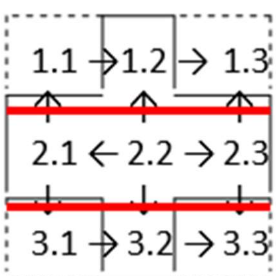
2.4. RepF(2.1)



RepF1 (2.1) = {(1.1), (2.1), (2.2), (3.1)}
RepF2 (2.1) = {(1.2), (2.3), (3.2)}
RepF3 (2.1) = {(1.3), (3.3)}

RpF3 ist unzusammenhängend.

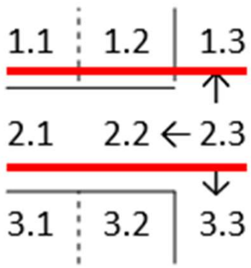
2.5. RepF(2.2)



RepF1 (2.2) = {(1.2), (2.1), (2.2), (2.3), (3.2)}
RepF2 (2.2) = {(1.1), (1.3), (3.1), (3.3)}

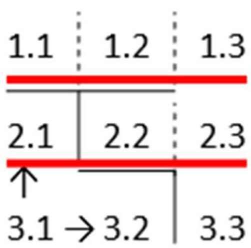
Kein RepF3 vorhanden; RepF2 maximal unzusammenhängend.

2.6. RepF(2.3)



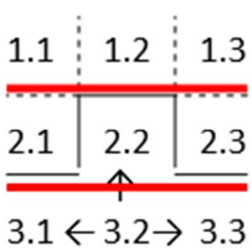
RepF1 (2.3) = {(1.3), (2.2), (2.3), (3.3)}
RepF2 (2.3) = {(1.2), (2.1), (3.2)}
RepF3 (2.3) = {(1.1), 3.1)}RepF3 zusammenhängend.

2.7. RepF(3.1)



RepF1 (3.1) = {(2.1), (3.1), (3.2)}
RepF2 (3.1) = {(1.1), (2.2), (3.3)}
RepF3 (3.1) = {(1.2), (1.3), (2.3)}

2.8. RepF(3.2)



RepF1 (3.2) = {(2.2), (3.1), (3.2), (3.3)}
RepF2 (3.2) = {(1.2), (2.1), (1.3)}
RepF3 (3.2) = {(1.1), (1.3)}

RepF3 unzusammenhängend.

2.9. RepF(3.3)

1.1	1.2	1.3
2.1	2.2	2.3 ↑
3.1	3.2 ←	3.3

RepF1 (3.3) = {(2.3), (3.2), (3.3)}
RepF2 (3.3) = {(3.1), (2.2), (1.3)}
RepF3 (3.3) = {(1.1), (1.2), (2.1)}

Bibliographie

Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Quant-Qual%20Arithm.pdf (2009)
Toth, Alfred, Umgebungen semiotischer Räume. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Umg.%20sem.%20Raeume.pdf (2010a)
Toth, Alfred, Überlappungen von Repräsentationsfeldern. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Ueberlapp.pdf (2010b)

Zum gemeinsamen Ursprung von Mathematik und Semiotik

1. Gegeben sei ein Objekt Ω. Man kann von ihm auf genau zweierlei Weise abstrahieren:

1.1. Qualitätsabstraktion: Wird die Qualität von Ω abstrahiert, so muss die Quantität Qant(Ω) zurückbleiben. Dadurch kommt man vom Objekt zur Zahl als Anzahl.

1.2. Quantitätsabstraktion: Wird die Quantität von Ω abstrahiert, so müssen die Qualitäten Qual(Ω) zurückbleiben. Dadurch kommt man vom Objekt zum Zeichen.

2. Von der Zahl als Anzahl (Kardinalzahl) kann die Zahl als Ordinalzahl unterschieden werden, um die Anordnung von Objekten (Ω_1, Ω_2, Ω_3, ..., Ω_n) nach der Qualitätsabstraktion aufrechtzuerhalten. Da die Ordnung den Begriff der Position einer Zahl in einer Zahlenreihe schafft, wodurch bestimmte Zahlen Vorrang vor anderen gewinnen, kommt hierdurch ein qualitatives Element in die rein quantitative Zahlendefinition-

3. Möglicherweise setzt daher die Schaffung der Ordinalzahl aus der Kardinalzahl den Begriff der semiotischen Gradation (Generierung) voraus (vgl. Bense/Walther 1973, S. 32), der dann, auf die Kardinalzahlen angewandt, die Ordinalzahlen ergibt.

4. Der semiotische Gradations- bzw. der mathematische Ordnungsbegriff ist nicht nur den Peano-Zahlen ($\mathbb{Z}$) gemein, sondern auch den qualitativen Günther-Zahlen ($\mathfrak{C}$). Bei den Peirce-Zahlen kann aufgrund des Gradationsbegriffs zwischen triadischen (td$\mathbb{P}$), trichotomischen (tt$\mathbb{P}$)und diagonalen Peirce-Zahlen (d$\mathbb{P}$) unterschieden werden (vgl. Toth 2009).

Bibliographie

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Frege, Gottlob, Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884 (S. 67 ff.)

Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

Ist die Semiotik wirklich monokontextural?

1. Bereits Bense (1980) und in seinem Anschluss v.a. Bayer (1994) hatten vermutet, die Peircesche Semiotik sei polykontextural, da sie über einen zehnfachen gestuften Realitätsbezug verfügt und der Begriff der Reflexion mit jenem der Repräsentation semiotisch deckungsgleich sei. Ich selber habe in Dutzenden von Arbeiten weitere Aspekte v.a. aus der semiotischen Zahlentheorie hervorgehoben, welche die sog. Peirce-Zahlen qualitativ von den Peano-Zahlen unterscheiden. Auf die „transklassische" Struktur der Semiotik hat m.W. als erster Siegfried Maser (1971/73, S. 29 ff.) hingewiesen.

2. Wie in Toth (2010) gezeigt, kann man die Semiotik erstens auf eine kenogrammatische Struktur reduzieren:

1. Wertabstraktion → $(\{3.\alpha\}\ \{2.\beta\}\ \{1.\gamma\}) \rightarrow (\{a\}, \{b\}, \{c\})$

2. Iterationsabstraktion → $(\{a\}, \{b\}, \{c\}) \rightarrow (a, b, c)$

3. Positionsabstraktion → $(a, b, c) \rightarrow (x, y, z)$

und zweitens auf die Struktur der qualitativen Zahlen, wobei im ersten Schritt die Ebene der Deutero-Zahlen und im zweiten Schritt die Ebene der Proto-Zahlen erreicht wird.

1. Iterationsabstraktion → $(\{3\}, \{2\}, \{1\}) \rightarrow (3, 2, 1)$

2. Positionsabstraktion → $(3, 2, 1) \rightarrow \{ (3, 2, 1), (3, 1, 2), (2, 3, 1),$
$(2, 1, 3), (1, 3, 2), (1, 2, 3)\}$,

Nun korrespondiert die Reduktion der Multikategorialität der Zeichenrelationen in 1. auf eine triadische Struktur mit nur 3 Werten, die gegensetitig verschieden sein müssen, genau der Ausgangsbasis zur Bildung der 3 x 3 x 3 = 27 möglichen triadischen Zeichenrelationen, als deren Fragment die 10 Peirceschen Zeichenklassen unter Anwendung der Ordnungsrelation $(a \leq b \leq c)$ auf die Zeichenform (3.a 2.b 1.c) bestimmbar sind. Man kann ferner der Übergang $(\{3\}, \{2\}, \{1\}) \rightarrow (3, 2, 1)$ auch dadurch deuten, dass Mengen von Kategorien auf die Menge der

Trichotomien reduziert werden, da jede Zeichenrelation der triadisch-trichotomischen Form (3.a 2.b 1.c) in der trichotomischen Form (a, b, c) notierbar ist.

Beim 2. Übergang wird schliesslich die lineare Ordnung von Zeichenklassen, d.h. die retrosemiosisch-degenerative für Zeichenklassen (3→2→1) und die semiosisch-generative für Realitätsthematiken (1→2→3) zu Gunsten der Mengen der 6 aus 3 Elementen herstellbaren Permutationen ersetzt.

Mit anderen Worten: Behält man die Werbesetzung der unterliegenden keno-grammtischen Struktur einer Semiotik bei, wie dies auch Kronthaler in seiner Mathematik der Qualitäten tut, dann genügt es, die Gesetze der Iterativität und der Positionalität der Zeichenrelationen aufzuheben, um die drei Ebenen von Peirce-Zahlen zu bekommen. Unsere Untersuchung hat dabei gezeigt, dass in der Semiotik bisher nie mit Trito-Zahlen gerechnet wurde, denn diese Zeichenrelationen haben die Form ({3}, {2}, {1}). Wegen der Doppeltheit auftretender Interpretanten ist z.B. die Struktur (3.a 3.b 2.c 1.d) als eine Ausgangsstruktur der semiotischen Kommunikationstheorie zu betrachten. Die Zeichenrelationen, die in der bisherigen Semiotik verwendet worden waren, sind also mathematisch gesprochen Deutero-Zahlen. Ferner sind die in Toth (2008, S. 177 ff.) eingeführten semiotischen „Diamanten" die ihnen zugehörigen Peano-Zahlen.

Was wir aus dieser Untersuchung allgemein für die Theorie qualitativer Zahlen gewinnen, ist, dass nicht etwa durch die Aufhebung der Wertbelegung von Zahl-struktur die logische Identität wegfällt (denn sonst wäre die Mathematik der Qualitäten monokontextural!!), sondern dass dies durch die Abbildungen von Mengen auf Elemente in der Iterationsabstraktion und durch die Permutation dieser Menge von Elementen in der Positionsabstraktion erfolgt.

Bibliographie

Bayer, Udo, Semiotik und Ontologie. In: Semiosis 24-76, 1994, S. 3-34

Bense, Max, Gotthard Günthers Universalmetaphysik. In: Neue Zürcher Zeitung 20./21.9.1980 (s.p.)

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Protozahlen und Peanozahlen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Nachfolger von Peirce-Zahlen in kategorialer Darstellung

1. Gemäss Toth (2009) werden drei Arten von Peirce-Zahlen (Pz) unterschieden:

- triadische Peirce-Zahlen (tdPz): (1.), (2.), (3.)

- trichotomische Peirce-Zahlen (ttPz): (.1), (.2), (.3)

- diagonale Peirce-Zahlen (dgPz) = tdPz×ttPz = (1.1), (2.2), (3.3)

2. Wie in Toth (2010) dargestellt, kann man jedes Subzeichen als Kategorie einführen. Unter Kategorie wird eine Leerform oder Variable C verstanden, die dadurch bestimmt wird, dass sie mit einem A zusammen ein B ergibt. Im folgenden wird, Toth (2010) ergänzend, eine einheitliche kategoriale Notation für die Nachfolgerrelation aller drei Peirce-Zahlen eingeführt.

tdPz: $(a.b) = <x, <y.1>, <a.(b+1)>>$

tdPz: $(a.b) = <x, <1.y>, <(a+1).b>>$

dgPz: $(a.b) = <x, <1.1>, <a.(b+1).(b+1)>>$

Bibliographie

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Toth, Alfred, Semiotische syntaktische Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2010

Semiotische syntaktische Kategorien

1. Wir beziehen uns bei der folgenden Idee auf den Begriff der syntaktischen Kategorie als Leerstelle, wie sie von Ajdukiewicz (1935) eingeführt und später vor allem in der Montague-Grammatik für syntaktische Strukturen einerseits und für Ausdrücke der intensionalen Semantik anderseits Verwendung gefunden hatte (vgl. Montague/Schnelle 1972, S. 18 ff., 23 ff.).

2. Ein Ausdruck wie

y = f(x)

ist insofern doppeldeutig, als sowohl die ganze Funktion als auch der Funktionswert mit y bezeichnet werden. Dem kann abgeholfen werden, indem man definiert: Eine Funktion ist dasjenige, was, angewandt auf x, y ergibt. Dann ist also die freie Variable x das Erste, die abhängige Variable (der Funktionswert) y das Zweite, und die ganze Funktion das Dritte. Mittels kategorialem Denken kann man also in Sonderheit die triadischen Strukturen hinter den binären (dichotomischen) mathematischen Formulierungen rekonstruieren. Die kategoriale Darstellung von y = f(x) ist also <x, y>.

3. Entsprechend kann man nun die Subzeichen definieren:

(a.b) = <<c.d>, <e.f.>>

Z.B.

(1.1) = <<1.2>, <1.3>>, d.h.

explizit:

(1.1) = <<x>, <1.2>, <1.3>>,

und unter Berückschtigung der „verschachtelten Relationen“:

(1.1) = <<x>, <<1.2>, <1.3>>>.

Die verschachtelte Notation funktioniert allerdings nur bei expliziter Notation, d.h. wenn der Platz des betreffenden x angegeben wird. Anderseits ist die kategoriale

Bestimmung des x natürlich eineutig, solange sich der kategoriale Ausdruck auf eine Trichotomie bzw. Triade bezieht.

Allerdings ist natürlich auch die folgende Definition möglich:

(1.1) = <<x>, <2.1>, <3.1>>,

bzw.

(1.1) = <<x>, <<2.1>, <3.1>>>.

In der Terminologie von Toth (2009) bezieht sich also die erste Definition auf (1.1) als Element der trichotomischen, die zweite auf (1.1) als Element der triadischen Peirce-Zahlen. TdPZ sind damit definiert als die Menge aller (a´.b), für die gilt: a´> a. TtPZ sind entsprechend defniert als die Menge aller (a.b´), für die gilt: b´> b. Da somit ein Subzeichen bei tdPz als auch ttPz nur der Nachfolger des triadischen ODER trichotomischen Vorgängerwertes, nicht aber von beiden, sein kann, wurden in Toth (2009) noch die diagonalen Peirce-Zahlen (dPz) eingeführt. Damit bekommen wir eine dritte Definition:

(1.1) = <<x>, <2.2>, <3.3>>,

bzw.

(1.1) = <<x>, <<2.2>, <3.3>>>.

Damit kann man also sagen, dass jedes nicht-genuine Subzeichen der semiotischen Matrix nicht nur als eine Kategorie im Sinne der logischen Kategorietheorie eingeführt werden kann, sondern als eine Menge von 2 Kategorien, die je nachdem Elemente der tdPz oder der ttPz sind. Bei den genuinen Subzeichen sind es sogar 3 Kategorien, d.h. zusätzlich von diagPz.

Bibliographie

Ajdukiewicz, Kazimierz, Die syntaktische Konnexität. In: Studia Philosophia 1, 1935, S. 1-27

Montague, Richard/Schnelle, Helmut, Universale Grammatik. Braunschweig 1972

Toth, Alfred, Kleine Peirce-Zahlen-Arithmetik. In: EJMS http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Kl.%20Peirce-Z-Arithm..pdf

Zusammenhang und verbotene Strukturen in semiotischen Feldern

1. Wir gehen wiederum davon aus, dass wir unter der (unmittelbaren Umgebung eines Subzeichens die Menge

U(a.b) = ((a-1.b) ,(a.b-1); (a+1.b)), (a.b+1)}

verstehen, d.h. nur solche Subzeichen (a´.b´) werden als unmittelbare Nachbarn von (a.b) aufgefasst, die höchstens einen Schritt, d.h. einen triadischen oder einen trichotomischen Schritt, von (a.b) entfernt sind, d.h. $|a'-a|$ oder $|b' - b|$. Hierdurch wird in Sonderheit bestimmt, dass diagonal banchbarte Subzeichen zu den mittelbaren Nachbarn gehören, da zu ihrer Erreichung 2 lineare Schritte nötig sind:

$\downarrow \leftarrow$ 1.3

$\leftarrow$ 2.2

3.1

2. Wenn wir gleiche Umgebungen mit gleichen kleinen griechischen Buchstaben markieren, dann folgt aus derDefinition von U(a.b), dass die Strukturen

α	α		α	α
α				α
	α		α	
α	α		α	α

Das gilt also sowohl für Haupt- (rechte Beispiele) wie für Nebendiagonalität (linke Beispiele). Es bedeutet ferner, dass in den oberen beiden Beispielen nicht die lineare Adjazenz von α - α ausgeschlossen wird – denn diese ist garantiert dadurch, dass (a.b) $\in$ U(a.b) ist, d.h. per definitionem, sondern die diagonale Adjazenz.

3. An dieser Stelle ist ein kleinerer Unterbruch nötig. Ich erinnere daran (Toth 2009), dass für triadische Peirce-Zahlen gilt:

tdPZ: $1. \subset 2. \subset 3.$

und für trichotomische Peirce-Zahlen:

ttPZ: $.1 < .2 < .3$

zwar deshalb, weil jede tiefere Kategorie in der höheren so eingeschlossen ist, dass sich eine verschachtelte „Relation über Relationen“ ergibt (Bense 1979, S. 53, 67). Da diese Relationen aber umkehrbar sind, gilt auch

tdPZ: $3. \supset 2. . \supset 1.$

ttPZ: $.3 > .2 > .1$

Genuine Subzeichen (identitive Morphismen) sind demnach dadurch charakterisiert, dass für alle (a.b) gilt (a. =.b) und somit a. $\subset\supset$ .b und .a <> .b.

Allgemein gilt somit für alle (a.b), (c.d) mit paarweise verschiedenen Werten für a, b, c, d: a. $\subset$ c. oder a. $\supset$ c. sowie .b < .d oder .b > .d.

Somit gilt für alle (a.b), (c.d) mit (c.d) = $(a.b)^{\circ}$: a. $\subset$ c. und .b > .d oder a. $\supset$ c. und .b < .d.

Würden nun diagonale Nachbarn als unmittelbare Umgebung erlaubt, entstünde in

$$\begin{array}{cccc} \alpha & & & \alpha \\ & \alpha & \alpha & \\ \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{array}$$

ein Konflikt, insofern gelten würde:

(a.b) = (c.d) mit a < c oder a > c sowie b > d oder b < d. Damit wären also 2 Subzeichen unvergleichbar bzw. durch die Erlaubnis der unmittelbaren diagonalen Nachbarschaft der logische Identitätssatz aufgehoben.

4. Damit bekommen wir als maximale widerspruchsfreie Umgebungsstruktur

	α	
α	α	α
	α,	

die bekanntlich U(2.2) ist. Weil hier entsprechend der Diagnalität jeweils nur direkte unmittelbare Nachbarschaft besteht, kann man das Diagramm sogleich zur vollständigen kategorialen Matrize vervollständigen

β	α	β
α	α	α
β	α	β

Setzen wir jedoch links oben ein α in die Matrize

α, dann folgen sofort drei unmittelbar benachbarte Elemente

α	α	-
α	-	-
-	-	-

Nehmen wir an, das nächste Elemente sei β, dann muss das dritte diagonale Element γ sein

α	α	-
α	β	-
-	-	γ

Wie man nun aber weiter macht, in mehrdeutig., denn erstens kann das zentrale β als seinen Linksvorgänger ein β beanspruchen, dann aber ist diese Position zusammen mit α doppeltbesetzt: U(β) = (α, β). Nimmt man aber z.B. ein, der rechte untere Block sei eine Kopie der ganzen 3×3-Matrix, dann kann man einsetzen

α	α	-
α	β	β
-	β	γ

β hat dann als weiteres Element β in der rechten oberen Ecke, aber nun ist die linke untere Ecke unbestimmt:

α	α	β
α	β	β
?	β	γ,

es bleibt also bis zuletzt ein Moment der Unbestimmtheit in einem semiotischen Feld.

Bibliographie

Bense, Max,Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Die quantitativ-qualitative Arithmetik der Peirce-Zahlen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009